How to solve it[1]

George Pólya, *Universidade de Princeton, EUA*

Sumário

Prefácio à primeira tiragem

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, para toda a vida, a sua marca na mente e no carácter.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objectivo.

Um estudante cujo curso inclui Matemática tem, também, uma oportunidade única, que ficará evidentemente perdida se ele considerar esta matéria como uma disciplina com que precisa obter tantos créditos e a qual deverá esquecer, o mais rápido possível, assim que passar pelas provas finais. A oportunidade pode ser desperdiçada até mesmo se o estudante

---

[1] Tradução de parte do livro *How to solve it: A new aspect of the mathematical method,* publicado originalmente em Princeton, pela Princeton University Press, em 1945. Existe uma edição brasileira, intitulada *A arte de resolver problemas*, da Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1977.

tiver algum talento natural para a Matemática, pois ele, como todos os outros, precisa descobrir seus talentos e seus gostos: ninguém poderá saber se gosta de torta de maçã se nunca tiver provado torta de maçã. É possível, porém, que chegue a perceber que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que o intenso trabalho mental pode ser um exercício tão agradável quanto uma animada partida de ténis. Tendo experimentado prazer no estudo da Matemática, ele não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: um *hobby*, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição.

O autor recorda-se do seu tempo de estudante, um aluno um pouco ambicioso, ávido por compreender alguma coisa de Matemática e de Física. Ele assistia às aulas, lia livros, tentava assimilar as resoluções e os factos que lhe eram apresentados, mas havia uma questão que o perturbava repetidamente: "Sim, a resolução parece que funciona, que está certa, mas como seria possível inventar, eu próprio, essas coisas?" Hoje o autor ensina Matemática numa universidade. Pensa, ou espera, que alguns dos seus alunos mais interessados façam perguntas semelhantes e procura satisfazer a sua curiosidade. Na tentativa de compreender, não só como se resolve este ou aquele problema, mas também as motivações e procedimentos da resolução e procurando explicar a outros essas motivações e esses procedimentos, ele foi afinal levado a escrever o presente livro. O autor tem a esperança de que este venha a ser útil a professores que desejem desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver problemas e a estudantes que realmente queiram desenvolver a sua própria capacidade.

Muito embora este livro dedique atenção especial às necessidades de alunos e professores, ele deverá interessar a qualquer pessoa que se preocupe com os meios e as maneiras da invenção e da descoberta. É possível que este interesse seja mais difundido do que se presume, sem maior reflexão. O espaço dedicado pelos jornais e revistas populares a palavras cruzadas e a outros enigmas parece revelar que as pessoas passam algum tempo resolvendo problemas sem aplicação prática. Por detrás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos da resolução.

As páginas seguintes foram escritas de forma um pouco concisa, mas tão simples quanto possível, e fundamentam-se num longo e sério estudo dos métodos de resolução. Este tipo de estudo, chamado *heurística* por alguns autores, não está na moda nos dias que correm, mas tem um longo passado e, talvez, algum futuro.

Pelo estudo dos métodos de resolução de problemas, percebemos um novo aspecto da Matemática. Sim, porque ela tem dois aspectos: é a rigorosa ciência de Euclides, mas é também uma outra coisa. A Matemática, apresentada da maneira euclidiana, revela-se uma ciência dedutiva, sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência. Mas o segundo aspecto é novo sob um certo ponto de vista: a Matemática *in statu nascendi*, no processo de ser inventada, jamais foi apresentada exactamente desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público.

A heurística tem múltiplas conexões: matemáticos, lógicos, psicólogos, educadores e até filósofos reivindicam partes deste estudo para os seus domínios particulares. O autor, bem ciente da possibilidade de crítica de certos sectores e perfeitamente consciente das suas limitações, tem uma reivindicação a fazer: ele tem alguma experiência na resolução de problemas e no ensino da Matemática em diversos níveis.

O assunto é tratado pelo autor com maior profundidade num livro mais extenso que está em fase de conclusão.

Universidade de Stanford, 1 de Agosto de 1944

Parte 1: Em aula

Objectivo

1. Auxílio ao estudante. Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho.*

Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, *sem dar nas vistas*.

O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa na sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante*.

2. Questões, recomendações, operações mentais. Ao procurar realmente ajudar o aluno, com descrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos. Assim, em inúmeros problemas, temos de indagar: *Qual é a incógnita?* Podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? A finalidade destas indagações é focalizar a atenção do aluno na incógnita. Algumas vezes, obtém-se o mesmo efeito de maneira mais natural, com uma sugestão: *Considere a incógnita*! A indagação e a sugestão visam ao mesmo objectivo: ambas tendem a provocar a mesma operação mental.

Pareceu ao autor que valeria a pena coligir e agrupar indagações e sugestões típicas, úteis para distinguir os problemas com os alunos. A lista que aqui estudamos contém indagações e sugestões deste tipo, cuidadosamente seleccionadas e dispostas[2]. Elas são igualmente úteis aquele que procura resolver problemas por si próprio. Se o leitor ficar suficientemente familiarizado com essa lista e conseguir perceber, por detrás da sugestão, a acção sugerida, verá que a lista enumera, indirectamente, *operações mentais típicas, úteis*

[2] Ver a lista em anexo.

para a resolução de problemas. Estas operações estão indicadas na ordem em que é mais provável que ocorram.

3. Generalidade. É uma importante característica das indagações e sugestões que constituem a nossa lista. Tomem-se as indagações: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* Elas são de aplicação geral, podemos fazê-las com sucesso ao tratarmos de problemas de qualquer tipo. A sua utilização não está restrita a nenhum assunto em particular. O nosso problema pode ser algébrico ou geométrico, matemático ou não, um problema científico importante ou um mero enigma. Não há diferença, as indagações fazem sentido e podem auxiliar-nos a resolver o problema.

Há, de facto, uma restrição, mas que nada tem a ver com o assunto da matéria. Algumas indagações e sugestões da lista são aplicáveis apenas a "problemas de determinação" e não a "problemas de demonstração". Ver PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO[3].

4. Bom senso. As indagações e sugestões da nossa lista são genéricas mas, excepto quanto à sua generalidade, são naturais, simples, óbvias e têm originam no simples senso comum: Tome-se a sugestão: *Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.* Ela aconselha a fazer aquilo que seria feito de qualquer maneira, sem nenhum conselho, por quem estivesse realmente interessado no seu problema. Está com fome? Deseja então conseguir comida e pensa em meios conhecidos de obtê-la. O seu problema é de Geometria? Deseja então traçar um triângulo e pensa em processos conhecidos de fazê-lo. Tem um problema qualquer? Deseja então encontrar uma certa incógnita e pensa em maneiras conhecidas de encontrar essa ou outra incógnita semelhante. Se fizer isto, estará seguindo exactamente a sugestão que citamos em nossa lista. E estará assim no caminho certo, pois a sugestão é boa e indica um procedimento que frequentemente apresenta bons resultados.

Todas as indagações e sugestões da nossa lista são naturais, simples, óbvias, apenas o bom senso comum, mas elas formulam este bom senso em termos gerais. Elas indicam uma certa conduta que se apresenta naturalmente a toda a pessoa que esteja realmente interessada no seu problema e tenha alguma dose de bom senso. Mas aquele que procede de maneira certa geralmente não se preocupa em exprimir o seu procedimento em termos claros, ou possivelmente é incapaz de fazê-lo. A nossa lista procura assim expressar tal facto.

---

[3] Estas entradas encontram-se na Parte III do livro *How to solve it*, intitulada "Um pequeno dicionário de heurística".

5. Professor e aluno. Imitação e prática. Há dois objectivos que o professor pode ter em vista ao dirigir ao seu aluno uma indagação ou uma sugestão da lista: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

A experiência mostra que as indagações e sugestões da nossa lista, se usadas de modo adequado, muito frequentemente ajudam o estudante. Elas têm em comum duas características: bom senso e generalidade. Como se originam no simples senso comum, muitas vezes surgem naturalmente. Elas bem poderiam ter ocorrido ao próprio aluno. Por serem genéricas, auxiliam discretamente: apenas indicam a direcção geral, deixando muito para o estudante fazer.

Mas os dois objectivos mencionados estão intimamente ligados: se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas. Não devemos, então, esquecer que as nossas indagações são genéricas, aplicáveis a muitos casos. Se a mesma indagação for proveitosamente repetida, dificilmente o estudante deixará de a notar e será induzido a formular, ele próprio, essa indagação em situações semelhantes. Pela repetição da indagação, poderá chegar à ideia certa. Com tal sucesso, ele descobrirá a maneira correcta de utilizar a indagação e assim a tê-la-á realmente assimilado.

O estudante poderá assimilar tão bem algumas das questões da nossa lista que finalmente será capaz de apresentá-la a si próprio no momento apropriado e de realizar, natural e vigorosamente, a operação mental correspondente. Quando tal acontece, o estudante extrai o maior proveito possível da lista. O que poderá o professor fazer para obter este melhor resultado possível?

A resolução de problemas é uma competência prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer competência por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora da água e, finalmente, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus problemas e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir nas suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Quando o professor tenciona desenvolver nos seus alunos as operações mentais correspondentes às indagações e sugestões da nossa lista, ele as apresenta tantas vezes quanto o puder fazer com naturalidade. Além disso, quando o professor resolve um problema na aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correcto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um facto matemático qualquer.

Divisões principais, questões principais

6. As quatro fases. Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que no princípio a nossa concepção do problema seja muito incompleta; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução.

Para agrupar convenientemente as indagações e sugestões da nossa lista, distinguiremos quatro fases do trabalho. Primeiro, temos de *compreender o problema*, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos uma *reflexão* sobre a resolução completa, revendo-a e discutindo-a[4].

Cada uma destas fases tem a sua importância. Pode acontecer que a um estudante ocorra uma ideia brilhante excepcional e, saltando sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Estas ideias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas alguma coisa muito inconveniente e muito desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção. Acontecerá o pior se o estudante se lançar a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter *compreendido* o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de *plano*. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante *verificar cada passo*. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de *reconsiderar* a solução completa.

7. Compreender o problema. É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem

[4] Ver a lista em anexo.

escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado a uma apresentação natural e interessante.

Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante. Daí porque, raramente, pode o professor dispensar as indagações: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*

O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá *traçar uma figura* e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá *adoptar uma notação adequada*, pois, dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos. Há uma outra indagação que pode ser útil neste estágio preparatório, desde que não se espere para ela uma resposta definitiva e sim uma provisória, uma suposição: *É possível satisfazer a condicionante?*

(Na exposição da Parte II, a "Compreensão do Problema" está subdividida em dois estágios: "Familiarização" e "Aperfeiçoamento da compreensão".)

8. Exemplo. Tomemos, para ilustrar alguns pontos tratados acima, o seguinte exemplo simples: *Calcular a diagonal de um paralelepípedo rectângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura*.

Para discutir com proveito este problema, os estudantes precisam conhecer o teorema de Pitágoras e algumas das suas aplicações à Geometria Plana, mas basta-lhes um conhecimento sistemático muito superficial da Geometria Espacial. O professor pode aqui contar com uma pequena familiaridade dos alunos com as relações espaciais.

O professor pode tornar interessante o problema, concretizando-o. A sala de aulas é um paralelepípedo rectângulo cujas dimensões podem ser medidas ou estimadas. Os alunos devem calcular, "medir indirectamente", a diagonal da sala. O professor indica o comprimento, a largura e a altura da sala e, com um gesto, mostra a diagonal. Ele anima a figura que traçou no quadro-negro por contínuas referências à sala.

O diálogo entre o professor e seus alunos pode principiar da seguinte maneira:

— *Qual é a incógnita?*

— O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.

— *Quais são os dados?*

— O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.

— *Adopte uma notação adequada.* Qual a letra que deve denotar a incógnita?

— *x*.

— Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura?

— *a, b* e *c.*

— *Qual é a condicionante* que relaciona *a, b* e *c* com *x*?

— *x* é a diagonal do paralelepípedo no qual *a, b* e *c* são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.

— Trata-se de um problema razoável? Ou seja, *a condicionante é suficiente para determinar a incógnita?*

— Sim, ele é razoável. Se conhecermos *a, b* e *c,* conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará.

9. Estabelecimento de um plano. Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até ao estabelecimento de um plano pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". A melhor coisa que pode um professor fazer pelo seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia.

Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas.

Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa se não relembrarmos alguns factos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *Conhece um problema relacionado?*

A dificuldade está em que, geralmente, há problemas demais que estão, de uma maneira ou de outra, relacionados com o nosso, isto é, que têm com este algum ponto em comum. Como, então, escolher aquele, ou os poucos, que são realmente úteis? Há uma sugestão que vai directamente a um ponto comum essencial: *Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*

Se nos conseguirmos lembrar de um problema anteriormente resolvido que esteja intimamente relacionado com o nosso, teremos muita sorte. Devemos fazer por merecer esta sorte e podemos merecê-la, aproveitando-a. *Eis um problema relacionado já resolvido. É possível utilizá-lo?*

As indagações anteriores, se forem bem compreendidas e atentamente consideradas, muitas vezes contribuem para dar início a uma correcta sequência de ideias, mas nem sempre conseguem ajudar, pois não podem fazer milagres. Se elas não funcionarem, precisaremos procurar, dando alguma volta, algum outro ponto de contacto apropriado e examinar os diversos aspectos do nosso problema. Teremos de o variar, de o transformar, de o modificar. *É possível reformular o problema?* Algumas das indagações da nossa lista indicam meios específicos de VARIAÇÃO DO PROBLEMA, tais como a GENERALIZAÇÃO, a PARTICULARIZAÇÃO, o recurso à ANALOGIA, o abandono de uma parte da condicionante e outros. Os detalhes são importantes, mas não podemos examiná-los agora. A variação do problema pode levar a um PROBLEMA AUXILIAR adequado: *Se não conseguir resolver o problema, procure antes resolver um problema relacionado.*

Ao tentarmos aplicar vários problemas ou teoremas conhecidos, cogitando diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, podemos distanciar-nos tanto do nosso problema original que correremos o risco de perdê-lo por completo. Há, no entanto, uma boa indagação que nos pode trazer de volta a ele: *Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?*

10. Exemplo. Voltemos ao exemplo considerado na secção 8. Quando o deixámos, os alunos haviam acabado de compreender o problema e de mostrar por ele algum interesse. Eles poderiam ter agora algumas ideias próprias, alguma iniciativa. Se o professor, tendo observado atentamente, não notar qualquer sinal dessa iniciativa, terá de repetir cuidadosamente todo o seu diálogo com os estudantes. Ele deve estar preparado para apresentar de novo, com modificações, as indagações não respondidas. Deve também estar preparado para encontrar, muitas vezes, o silêncio desconcertante de seus alunos (o qual será abaixo indicado por reticências.....).

— *Conhece um problema correlato?*

— .....

— Então, *qual é a incógnita?*

— A diagonal de um paralelepípedo.

— Conhece algum *problema que tenha a mesma incógnita?*

— Não. Ainda não resolvemos nenhum problema em que entrasse a diagonal de um paralelepípedo.

— Conhece algum *problema que tenha uma incógnita semelhante?*

— .....

— Repare, a diagonal é um segmento, um segmento de recta. Nunca resolveu um problema cuja incógnita fosse o comprimento de uma linha?

— Claro que já resolvemos desses problemas. Por exemplo, calcular um lado de um triângulo rectângulo.

— Está certo. *Eis um problema relacionado já resolvido. É possível utilizá-lo?*

— .....

— Teve sorte de se lembrar de um problema relacionado ao seu e que já resolveu antes. Não gostaria de o utilizar? *É possível introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a sua utilização?*

— .....

— Olhe aqui, o problema de que se lembrou refere-se a um triângulo. Há algum triângulo na sua figura?

Esperemos que esta última indicação seja bastante explícita para dar a ideia da solução, que é a introdução de um triângulo rectângulo (destacado na Figura 1), do qual a diagonal pedida é a hipotenusa. No entanto, o professor deve estar preparado para o caso em que até esta indicação tão explícita seja insuficiente para despertar os alunos do seu torpor. Deve ainda preparar-se para usar toda uma gama de indicações mais ou menos explícitas.

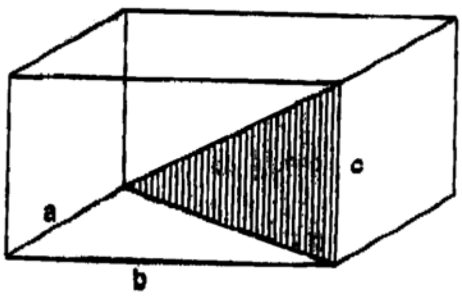

Figura 1

— Não gostaria de ter um triângulo na figura?

— Que tipo de triângulo gostaria de ter na figura?

— Não pode ainda calcular a diagonal, mas já disse que é capaz de calcular o lado de um triângulo. Então, o que fará agora?

— Poderia calcular a diagonal se ela fosse o lado de um triângulo?

Quando afinal, com ajuda maior ou menor, os estudantes conseguirem introduzir o elemento auxiliar decisivo, que é o triângulo rectângulo em destaque na Figura 1, o professor deverá estar convicto que seus alunos vêem bastante adiante, antes de encorajá-los a passar aos cálculos.

> — Acho que foi uma boa ideia traçar aquele triângulo. Agora tem um triângulo, mas a incógnita?
>
> — A incógnita é a hipotenusa do triângulo. Podemos calculá-la pelo teorema de Pitágoras.
>
> — Sim, se forem conhecidos os dois catetos. Mas não são?
>
> — Um cateto é dado, é c. O outro, parece que não é difícil de achar. Sim, o outro cateto é a hipotenusa de um outro triângulo rectângulo.
>
> — Muito bem! Agora vejo que já tem um plano.

11. Execução do plano. Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objectivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é do que mais se precisa.

O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos que os pormenores se inserem nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro.

Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante se esqueça do seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio tiver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno *verifique cada passo.*

Podemos nos convencer "intuitivamente" ou "formalmente" da correcção de um passo do nosso raciocínio. Podemos nos concentrar no ponto em questão até que o percebamos com tanta clareza e nitidez que não reste dúvida de que o passo é correcto ou, então, podemos deduzi-lo de acordo com regras formais. (A diferença entre "intuição" e "raciocínio formal" é, em muitos casos importantes, bastante clara, porém podemos deixar a sua discussão para os filósofos.)

O principal é que o estudante fique honestamente convicto da correcção de cada passo. Em certos casos, pode o professor realçar a diferença entre "perceber" e "demonstrar": *É possível perceber claramente que o passo está certo?* Mas pode também *demonstrar que o passo está certo?*

12. Exemplo. Retomemos o problema no ponto em que o deixamos, no final da seção **10.** O aluno conseguiu, afinal, ter a ideia da resolução. Ele percebe o triângulo do qual a incógnita x é a hipotenusa e a altura dada c é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face. Deve-se, possivelmente, insistir para que o estudante adopte uma notação apropriada. Ele deve escolher y para denotar o outro cateto, que é a diagonal da face cujos lados são a e b. Assim conseguirá perceber com maior clareza a ideia da resolução, que consiste em introduzir um problema auxiliar cuja incógnita será y. Por fim, calculando um triângulo após outro, ele poderá chegar a (ver a Figura 1)

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

e daí, eliminando a incógnita auxiliar y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

O professor não terá motivo de interromper o aluno se este executar correctamente as operações, a não ser, possivelmente, para alertá-lo de que deverá *verificar cada passo*. Assim, o professor pode argumentar:

— É possível *perceber claramente* que o triângulo de lados x, y e c é rectângulo?

O estudante a isto poderá responder honestamente "Sim, é", mas é possível que ele fique muito embaraçado se o professor, não contente com a convicção intuitiva do aluno, continuar a inquirir:

— Pode então *demonstrar* que o triângulo é rectângulo?

Por isso, é melhor que o professor suprima esta indagação até que a turma tenha uma boa base de Geometria Espacial. Mesmo neste caso, há o risco de que a resposta a uma pergunta incidental se torne a dificuldade principal para a maioria dos alunos.

13. Reflexão. Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem uma reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.

Nesta altura, o estudante cumpriu o seu plano. Ele escreveu a resolução, verificando cada passo. Assim, tem boas razões para crer que resolveu correctamente o seu problema. Apesar de tudo, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência de verificações. Em particular, se houver algum processo rápido e intuitivo para verificar, quer o resultado, quer o argumento, ele não deverá ser desprezado. *É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?*

Para nos convencermos da presença ou da qualidade de um objecto, desejamos vê-lo e tocá-lo. Assim como preferimos perceber por meio de dois sentidos, preferimos convencer-nos por duas demonstrações diferentes: *É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?* É preferível, naturalmente, um argumento curto e intuitivo do que um outro longo e trabalhoso: *É possível percebê-lo num relance?*

Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante a reflexão se eles tiverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que poderão utilizar outra vez o procedimento usado ou o resultado obtido. *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

14. Exemplo. Na secção **12**, os estudantes tinham finalmente chegado à solução: se as três arestas de um paralelepípedo rectângulo, que se originam num mesmo vértice, são *a, b* e *c*, a diagonal será

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

É possível verificar o resultado? O professor não pode esperar de um aluno inexperiente uma boa resposta a esta indagação. Os alunos devem, porém, aprender bem cedo que os problemas "literais" apresentam uma grande vantagem sobre os problemas puramente "numéricos": se o problema for literal ele se prestará a diversas verificações, as quais não podem ser aplicadas a um problema numérico. O nosso exemplo, embora bem simples, é suficiente para mostrar esta propriedade. O professor pode apresentar várias indagações a que os alunos facilmente responderão com "Sim", mas um "Não" revelará uma séria falha no resultado.

— *Utilizou todos os dados?* Todos os dados aparecem na sua fórmula que exprime a diagonal?

— O comprimento, a largura e a altura desempenham funções no nosso problema; este é simétrico em relação a *a, b,* e *c.* A expressão obtida para a diagonal será simétrica em relação a *a, b, c?* Ela permanecerá inalterada quando *a, b* e *c* forem permutados entre si?

— O nosso problema é de Geometria Espacial: calcular a diagonal de um paralelepípedo de dimensões dadas *a, b* e *c*. Ele é análogo a outro problema da Geometria Plana: calcular a diagonal de um rectângulo de dimensões dadas *a* e *b.* O resultado do nosso problema "espacial" será análogo ao resultado do problema "plano"?

— Se a altura *c* decrescer até se anular, o paralelepípedo transformar-se-á num paralelogramo. Se fizer $c = 0$ na sua fórmula, obterá a fórmula correcta para a diagonal de um paralelogramo rectângulo?

— Se a altura *c* crescer, a diagonal também crescerá. A sua fórmula mostra isto?

— Se todas as três dimensões do paralelepípedo crescerem numa determinada proporção, a diagonal também crescerá nessa mesma proporção. Se, na sua fórmula, substituir *a, b* e *c* por 12*a,* 12*b* e 12*c*, respectivamente, a expressão da diagonal, devido a essa substituição, também deverá ficar multiplicada por 12. Estará certo isto?

— Se *a, b* e *c* estiverem expressos em metros, a fórmula fornecerá a diagonal também em metros. Mas se mudar todas as medidas para centímetros, a fórmula deverá continuar válida. Estará certo isto?

(As duas últimas questões são essencialmente equivalentes; ver TESTE DIMENSIONAL.)

Estas indagações produzem diversos bons efeitos. Primeiro, um estudante inteligente não poderá deixar de impressionar-se pelo facto que a fórmula passou em tantos testes. Ele já ficara convicto da fórmula estar certa porque a deduzira cuidadosamente. Mas agora está ainda mais convencido disso e o aumento da confiança provém de outra fonte: deve-se a uma espécie de "prova experimental". Então, graças às indagações precedentes, os detalhes da fórmula adquirem um novo significado e ficam ligados a vários factos. A fórmula tem, portanto, melhor probabilidade de ficar lembrada, o conhecimento do estudante consolida-se. Finalmente, as indagações podem facilmente ser transferidas para problemas semelhantes. Após algumas experiências com problemas semelhantes, um estudante inteligente poderá perceber as ideias básicas gerais: a utilização dos dados relevantes, a variação dos dados, a simetria, a analogia. Se ele adquirir o hábito de dirigir a sua atenção para estes pontos, a sua capacidade de resolver problemas poderá definitivamente melhorar.

É possível verificar o argumento? Em casos difíceis e importantes, pode ser necessário verificar de novo o argumento, passo a passo. Geralmente, não basta tomar, para verificação alguns pontos "sensíveis". No nosso caso, pode ser conveniente discutir retrospectivamente, a questão que parecia a menos própria à discussão quando a solução ainda não tinha sido alcançada: é possível *demonstrar* que o triângulo cujos lados são ***a, b*** e ***c*** é rectângulo? (Ver o final da secção **12**).

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? Com um pouco de incentivo e após um ou dois exemplos, os estudantes facilmente encontram aplicações que consistam, essencialmente, em dar alguma *interpretação concreta* aos elementos matemáticos abstractos do problema. O próprio professor deu uma interpretação concreta ao tomar a sala em que dava a aula como o paralelepípedo do problema. Um estudante medíocre pode propor, como aplicação, calcular a diagonal da cantina em lugar da diagonal da sala de aula. Se os alunos não aparecerem com observações mais imaginosas, o professor poderá apresentar o problema de forma ligeiramente diferente, como, por exemplo: "Sendo dados o comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo rectângulo, calcular a distância do seu centro a um dos vértices".

Os estudantes podem utilizar o *resultado* do problema que acabaram de resolver, se observarem que a distância pedida é a metade da diagonal recentemente calculada. Ou então eles podem utilizar o *método*, introduzindo triângulos rectângulos apropriados (esta última alternativa é menos óbvia e algo mais desajeitada para o caso presente).

Depois desta aplicação, o professor pode discutir a configuração das quatro diagonais do paralelepípedo e das seis pirâmides das quais as seis diagonais são as arestas. Quando a imaginação geométrica dos alunos estiver suficientemente avivada, o professor deverá voltar à sua indagação: *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?* Há agora maior probabilidade de que os alunos encontrem alguma interpretação concreta mais interessante, como, por exemplo, a seguinte:

"No centro da cobertura rectangular de um edifício, que tem 21 metros de comprimento e 16 metros de largura, instala-se um mastro de 8 metros de altura. Para amarrar o mastro, precisamos de quatro cabos iguais. Estes partem do mesmo ponto, 2 metros abaixo do topo do mastro, e são fixados nos quatro cantos da cobertura do edifício. Qual será o comprimento de cada cabo?"

Os estudantes podem utilizar o *método* do problema que acabaram de resolver com detalhes, introduzindo um triângulo rectângulo num plano vertical a um outro plano horizontal, ou, se não, podem utilizar o *resultado*, imaginando um paralelepípedo rectângulo, do qual a diagonal x é um dos quatro cabos e as arestas são

$$a = 10{,}5 \qquad b = 8 \qquad c = 6.$$

Pela aplicação directa da fórmula, obtém-se $x = 14{,}5$.

Para outros exemplos, ver É POSSÍVEL UTILIZAR O RESULTADO?

15. Abordagens diversas. Voltemos, por um momento, ao problema considerado nas secções anteriores **8, 10, 12, 14.** O trabalho principal, que consistiu na descoberta de um plano, foi descrito na secção **10**. Ele poderia ter seguido uma linha de raciocínio diferente, apresentando as seguintes indagações:

— *Conhece algum problema relacionado?*

— Conhece um problema *análogo?*

— Como vê, o problema proposto é da Geometria Espacial. Poderia imaginar um problema análogo mais simples da Geometria Plana?

— Como vê, o problema proposto é relativo a uma figura no espaço e refere-se à diagonal de um paralelepípedo rectângulo. Que problema relativo a uma figura no plano poderia ser análogo? Ele deverá referir-se à — diagonal — de — um paralelogramo —

— Rectângulo.

Os estudantes, mesmo se forem muito vagarosos e indiferentes, e houverem sido incapazes de até aí fazer qualquer suposição, serão forçados a contribuir com pelo menos uma minúscula parte da ideia. Além disso, se os alunos forem assim tão lentos, o professor não deverá tomar o presente problema sem antes ter discutido, para os preparar, o problema análogo relativo ao paralelogramo. Aí então ele poderá prosseguir da seguinte maneira:

— *Eis aqui um problema relacionado já antes resolvido. É possível utilizá-lo?*

— *Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?*

Por fim, o professor pode chegar a sugerir aos alunos a ideia desejada, que consiste em conceber a diagonal de um dado paralelepípedo como a diagonal de um paralelogramo apropriado, que precisa ser introduzido na figura (como a intersecção de um paralelepípedo com um plano que passa por duas arestas opostas). A ideia é essencialmente a mesma que antes (secção **10**), mas a abordagem é diferente. Na secção **10**, o contacto com o conhecimento de que os estudantes dispunham foi estabelecido por intermédio da incógnita: um problema resolvido antes foi relembrado porque a sua incógnita era a mesma do problema proposto. Aqui, é a analogia que proporciona a ideia da resolução.

16. O método de questionar do professor, descrito nas secções anteriores, **8, 10, 12, 14, 15** consiste essencialmente nisto: começar por indagação ou sugestão genérica da nossa lista e, se necessário, descer gradualmente para outras indagações mais específicas e concretas até chegar à que provoque a resposta na mente do estudante. Se for preciso auxiliar o aluno a aproveitar a sua ideia, deve-se começar de novo, se possível, por uma indagação ou sugestão genérica da lista e, se necessário, voltar a alguma mais específica e assim por diante.

Naturalmente, a nossa lista é apenas a primeira do género. Ela parece suficiente para a maioria dos casos, mas sem dúvida poderá ser aperfeiçoada. É importante, porém, que as sugestões iniciais sejam simples, naturais e genéricas, e que a lista seja curta.

As sugestões devem ser simples e naturais, porque do contrário elas não podem ser *discretas*.

As sugestões devem ser genéricas, aplicáveis não apenas ao problema presente, mas também a problemas de todos os tipos, pois só assim elas poderão desenvolver a *capacidade* do estudante e não somente uma técnica específica.

A lista deve ser curta, para que as questões possam ser frequentemente repetidas, sem artificialismo e em condições diferentes. Desse modo, é provável que elas sejam finalmente assimiladas pelo estudante e contribuam para o desenvolvimento de um *hábito mental*.

É necessário descer gradualmente a sugestões específicas, para que o aluno tenha uma *parcela do trabalho* tão grande quanto possível.

Este método de questionar não é rígido. E ainda bem, pois, nestes assuntos, qualquer procedimento rígido, mecânico, pedante, será forçosamente prejudicial. O nosso método permite uma certa elasticidade e variação, admite abordagens diversas (secção **15**), pode e deve ser aplicado de tal maneira, que as questões apresentadas pelo professor *possam ter ocorrido ao próprio aluno.*

Se o professor desejar experimentar, na aula, o método aqui proposto, deverá, evidentemente, proceder com cautela. Deverá estudar cuidadosamente o exemplo apresentado na secção **8** e aqueles que seguem nas secções **18, 19** e **20**. Deverá preparar cuidadosamente os exemplos que pretende discutir, considerando também abordagens diversas. Deverá, ainda, começar por algumas tentativas e descobrir gradualmente como lhe será possível aplicar o método, como os estudantes o recebem e quanto tempo isso lhe tomará.

17. Questões boas e más. *Quando* o método de questionar acima formulado é bem compreendido, ele ajuda a avaliar, por comparação, a qualidade de certas sugestões que podem ser apresentadas na intenção de auxiliar os estudantes.

Voltemos à situação tal como ela se apresentava no início da secção **10**, quando foi feita a indagação: *Conhece um problema relacionado?* Em lugar desta, com a melhor das intenções de ajudar os alunos, pode ser que se apresente a questão: *É possível aplicar o teorema de Pitágoras?*

A intenção pode ser das melhores, mas a questão é das piores. Precisamos perceber em que situação foi ela apresentada, para em seguida ver porque há uma longa sequência de objecções contra esta espécie de "auxílio".

(1) Se o estudante estiver próximo da solução, ele entenderá a sugestão implícita na indagação; mas se não estiver, é muito provável que de modo algum perceba aonde se quer chegar com a questão. Assim, esta deixará de auxiliar no exacto momento em que o auxílio mais era necessário.

(2) Se a sugestão for compreendida, ela revelará todo o segredo, muito pouco restando para o estudante fazer.

(3) A sugestão é de natureza muito específica. Mesmo que o estudante aproveite na resolução do presente problema, nada aprenderá para problemas futuros. A questão não é instrutiva.

(4) Mesmo que ele compreenda a sugestão, o estudante dificilmente perceberá como ocorreu ao professor apresentar tal questão. E como poderia ele, o estudante, chegar a esta

questão por si próprio? Parece um passe de mágica, assim como tirar um coelho de uma cartola. A questão realmente nada tem de instrutiva.

Nenhuma destas objecções pode ser levantada contra o procedimento descrito na secção **10** e, novamente, na secção **15.**

Outros exemplos

18. Um problema de traçado geométrico. *Inscrever um quadrado num triângulo dado. Dois vértices do quadrado devem situar-se sobre a base do triângulo e os dois outros vértices sobre os dois outros lados do triângulo, um em cada.*

—*Qual é a incógnita?*

— Um quadrado.

— *Quais são os dados?*

— É dado um triângulo, nada mais.

— *Qual é a condicionante?*

— Os quatro vértices do quadrado devem situar-se sobre o perímetro[5] do triângulo, dois deles sobre a base e um vértice em cada um dos dois outros lados.

— *É possível satisfazer a condicionante?*

— Acho que sim. Não tenho muito a certeza.

— Parece achar que o problema não é muito fácil. *Se não puder resolver o problema proposto, procure primeiro resolver algum problema correlato.* É possível satisfazer uma *parte da condicionante?*

— Que quer dizer por parte da condicionante?

— Como vê, a condicionante refere-se a todos os vértices do quadrado. Quantos vértices tem este?

— Quatro.

— Uma parte da condicionante seria relativa a menos de quatro vértices. *Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado.* Que parte da condicionante é fácil de satisfazer?

— É fácil traçar um quadrado que tenha dois vértices sobre o perímetro — ou mesmo três vértices sobre o perímetro.

— *Trace uma figura!*

O aluno traça a Figura 2.

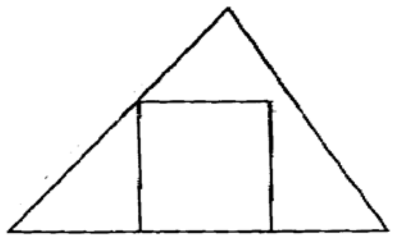

Figura 2

— *Manteve uma parte da condicionante e deixou a outra de lado. Até que ponto ficou a incógnita assim determinada?*

— O quadrado não ficará determinado se não tiver apenas três vértices sobre o perímetro.

— Muito bem. *Trace uma figura!*

O aluno traça a Figura 3.

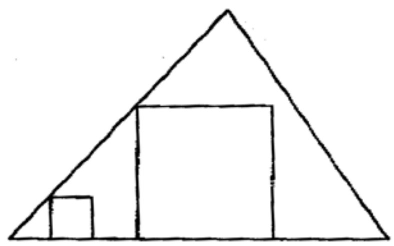

Figura 3

— Como disse, o quadrado não fica determinado pela *parte da condicionante que foi mantida. Como é que ele pode variar?*

— .....

— Três dos vértices do quadrado estão sobre o perímetro do triângulo, mas o quarto não está lá onde deveria ficar. O seu quadrado, como observou, está indeterminado, ele pode variar, assim como o seu quarto vértice. *Como é que pode variar?*

O professor levou o aluno até próximo da ideia da solução. Se este for capaz de perceber que o lugar geométrico do quarto vértice é uma recta, ele terá chegado à solução.

19. Um problema de demonstração. *Dois ângulos estão em planos diferentes, mas cada lado de um deles é paralelo ao lado correspondente do outro e está também na mesma direcção. Demonstrar que os dois ângulos são iguais.*

[5] Em 1945, quando o livro foi escrito, "perímetro", era usado tanto no sentido de "soma das medidas dos comprimentos de todos os lados" como no sentido de "fronteira" de uma figura.

O que temos a demonstrar é um teorema fundamental da Geometria Espacial. O problema pode ser submetido a estudantes que saibam a Geometria Plana e tenham conhecimento daquelas poucas noções da Geometria Espacial que servem de preparação para o presente teorema, nos *Elementos* de Euclides. (O teorema que enunciamos e vamos demonstrar constitui a proposição 10 do Livro XI dos Elementos.) Não apenas aquelas indagações e sugestões extraídas da nossa lista estão impressas em itálico, mas também outras que a elas correspondem, assim como "problemas de demonstração" correspondem a "problemas de determinação". (Esta correspondência é sistematicamente descrita em PROBLEMAS DE DETERMINAÇÃO, PROBLEMAS DE DEMONSTRAÇÃO, 5 e 6.)

— *Qual é a hipótese?*

— Dois ângulos estão em planos diferentes. Cada lado de um é paralelo ao lado correspondente do outro e tem também a mesma direcção.

— Q*ual é a conclusão?*

— Os dois ângulos são iguais.

— *Trace uma figura. Adopte uma notação adequada.*

O aluno traça as linhas da Figura 4 e escolhe, mais ou menos ajudado pelo professor, as letras que aparecem na figura.

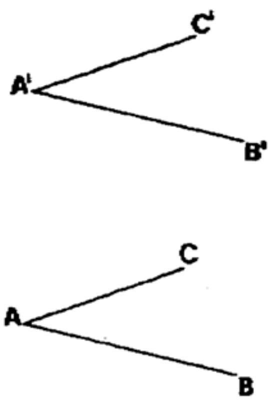

Figura 4

— *Qual é a hipótese?* Por favor, diga usando a sua notação.

— A, B, C não estão no mesmo plano que A', B', C' e $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. Além disso, AB tem a mesma direcção de $A'B'$ e AC a mesma de $A'C'$.

— *Qual é a conclusão?*

— $< BAC = < B'A'C'$.

— Considere a conclusão! *E procure pensar num teorema que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

— Se dois triângulos forem congruentes, os ângulos correspondentes serão iguais.

— Muito bem! *Eis um teorema correlato e já antes demonstrado. É possível utilizá-lo?*

— Parece que sim, mas ainda não vejo bem como.

— *É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?*

— .....

— Bem, o teorema que tão bem citou é relativo a triângulos, refere-se a um par de triângulos congruentes. Há algum triângulo na sua figura?

— Não, mas posso traçar alguns. Deixe-me ligar B a C e B' a C'. Haverá então dois triângulos, ?ABC e ?$A'B'C'$.

— Está certo. Mas para que servem esses triângulos?

— Para demonstrar a conclusão, $< BAC = < B'A'C'$.

— Bem, se quer demonstrar isto, de que tipo de triângulos precisa?

— De triângulos congruentes. Está claro, posso escolher B, C, B' e C' de tal maneira que

$$AB = A'B'\ ,\ AC = A'C'$$

— Muito bem! Que deseja agora demonstrar?

— Quero demonstrar que os triângulos são congruentes, que

$$?\ ABC = ?\ A'B'C'\cdot$$

— Se conseguir demonstrar isto, daí se seguirá imediatamente a conclusão

$$< BAC = < B'A'C'.$$

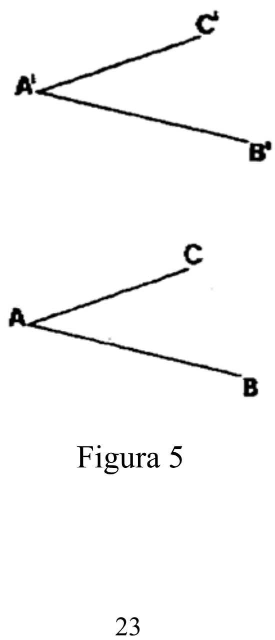

Figura 5

— Certo! Tem um novo objectivo, visa a uma nova conclusão. *Considere a conclusão! E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

— Dois triângulos são congruentes quando os três lados de um deles forem respectivamente iguais aos três lados do outro.

— Muito bem. Poderia ter escolhido um pior. Agora, *eis um teorema correlato e já antes demonstrado. É possível utilizá-lo?*

— Poderia utilizá-lo se soubesse que $BC = B'C'$.

— É isso mesmo. Portanto, o que é que procura?

— Demonstrar que $BC = B'C'$.

— *Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.*

— É, conheço um teorema que termina: "... então as duas linhas são iguais". Mas parece que ele não cabe aqui.

— *É preciso introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?*

— .....

— Repare, como poderia demonstrar que $BC = B'C'$, quando não há na figura uma relação entre BC e $B'C'$?

—.....

— *Utilizou a hipótese? Qual é a hipótese?*

— Admitimos que $AB \| A'B'$ e $AC \| A'C'$. Sim, é claro que terei de utilizar isto.

— *Utilizou toda a hipótese?* Diz que $AB \| A'B'$. Isto é tudo que sabe sobre estas linhas?

— Não. AB é também igual a $A'B'$, pelo traçado. Como também AC e $A'C'$ são iguais.

— Duas linhas paralelas do mesmo comprimento. É uma configuração interessante. *Já a viu antes?*

— Sim! É claro! Paralelogramo! Deixe-me ligar A a A', B a B' e C a C'.

— A ideia não é assim tão má. Quantos paralelogramos tem agora a sua figura?

— Dois. Não, três. Não, dois. Quero dizer, há dois que posso imediatamente demonstrar que são paralelogramos. Há um terceiro que parece ser um paralelogramo e espero demonstrar que o é. Com isso, a demonstração estará concluída.

Das respostas anteriores, poderíamos ter deduzido que o aluno é inteligente. Depois desta sua última observação, não restam mais dúvidas.

Este estudante conseguiu perceber um resultado matemático e distinguir entre demonstração e suposição. Sabe também que as suposições podem ser mais ou menos plausíveis. Na verdade, ele aproveitou alguma coisa das suas aulas de Matemática. Ele tem uma certa experiência real de resolver problemas e pode conceber e aproveitar uma boa ideia.

20. Um problema de razão de variação. *A água escoa para um vaso cilíndrico à razão* r. *O vaso tem a forma de um cone circular recto, de base horizontal, com o vértice para baixo; o raio da base é* a *e a altura do cone é* b. *Determinar a razão à qual o nível da água sobe quando a profundidade for* y. *Em seguida, calcular o valor numérico da incógnita, sabendo-se que* a = *4m,* b = *3m,* r = *2* m^3 *por minuto e* y = *1 m.*

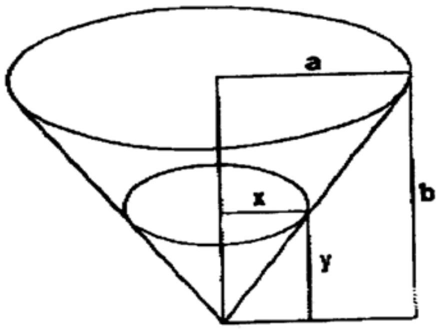

Figura 6

Admite-se que os alunos conheçam as mais simples regras de diferenciação e a noção de "razão de variação".

— *Quais são os dados?*

— O raio da base do cone a = 4m; a altura do cone b = 3m; a razão à qual a água escorre para o vaso r = 2m^3 por minuto e a profundidade da água num certo momento y = 1m.

— Certo. O enunciado do problema sugere que provisoriamente, se deve desprezar os valores numéricos; trabalhar com as letras; expressar a incógnita em função de *a, b, r* e *y* e só no final, depois de chegar à expressão literal da incógnita, substituir as letras pelos valores numéricos. Eu seguiria esta sugestão. Agora, *qual é a incógnita?*

— A razão à qual a superfície da água sobe quando a profundidade é *y*.

— Como? Poderia repetir em outras palavras?

— A razão da variação da profundidade da água é aumentada.

— Está certo, a razão de variação de *y*. Mas o que é razão de variação? *Volte às definições.*

— A derivada é a razão de variação.

— Correcto. Ora, *y* é uma função? Como dissemos, desprezamos o valor numérico de *y*. É possível imaginar que *y* varia?

— Sim, y, a profundidade, aumenta com o decorrer do tempo.

— Portanto, y é uma função de quê?

— Do tempo t.

— Muito bem. *Adopte uma notação adequada.* Como poderia escrever "a razão de variação de y" em símbolos matemáticos?

— $\frac{dy}{dt}$

— Certo. Assim esta é a sua incógnita. É preciso expressá-la em função de *a, b* r e y. A propósito , um destes dados é uma razão. Qual deles?

— r é a razão à qual a água escoa para o vaso.

— Como é isso? *Pode dizê-lo em outras palavras?*

— r é a razão de variação do volume de água no vaso.

— Como? *É possível formulá-lo de uma outra maneira?* Como representaria isso numa *notação adequada?*

— $r = \frac{dV}{dt}$

— O que é V?

— O volume de água no vaso no instante t.

— Muito bem. Agora, tem de expressar $\frac{dy}{dt}$ em função de *a, b,* $\frac{dV}{dt}$ e y. Como faria isto?

— .....

— *Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema relacionado.* Se não perceber ainda a relação que existe entre $\frac{dy}{dt}$ e os dados, procure introduzir alguma conexão mais simples que possa servir de intermediária. Como fazer isto?

— .....

— Não percebeu que há outras relações? Por exemplo, serão y e V independentes uma do outro?

— Não. Quando y cresce, V também cresce.

— Portanto, há uma relação. Qual é?

— Bem, V é o volume de um cone cuja altura é y. Não sei ainda qual é o raio da base.

— Não obstante, pode tomá-lo em consideração. Chame-o de alguma coisa, digamos x.

— $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$

— Certo. Agora, quanto a x. Independe de y?

— Não. Quando a profundidade y da água cresce, o raio da superfície livre, x, também cresce.

— Portanto, há uma relação entre eles.Qual é?

— É claro, triângulos semelhantes.

$$x : y = a : b.$$

— Está vendo? Mais uma relação. Eu não gostaria de deixar de aproveitá-la. Não se esqueça de que procura conhecer a relação entre V e y.

— Tenho

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2}.$$

— Muito bem. Isto não parece um bom elemento auxiliar? Mas não deve esquecer o seu objectivo. *Qual é a incógnita?*

— Bem, $\frac{dy}{dt}$

— Precisa encontrar uma relação entre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ e as outras grandezas. E já aqui tem uma entre y, V e outras quantidades. O que fazer?

— Diferenciar! Está claro!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \cdot \frac{dy}{dt}$$

— Eis tudo aí.

— Óptimo. E quanto aos valores numéricos?

— Se $a = 4$; $b = 3$; $\frac{dV}{dt} = r = 2$; $y = 1$, então

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt}$$

Parte II: Como resolver um problema — Um diálogo

Familiarização

Por onde começar? Comece pelo enunciado do problema.

Que posso fazer? Visualize o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível.

Qual a vantagem em assim proceder? É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objectivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes.

Aperfeiçoamento da compreensão

Por onde começar? Comece de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de perdê-lo por completo.

Que posso fazer? Isole as partes principais de seu problema. A hipótese e a conclusão são as partes principais de um "problema de demonstração"; a incógnita, os dados e a condicionante são as partes principais de um "problema de determinação". Verifique as partes principais do seu problema, considere-as uma a uma, em seguida examine-as em várias combinações, relacionando cada detalhe com os outros detalhes e cada um destes com a totalidade do problema.

Qual a vantagem em assim proceder? Deve-se preparar e clarificar os detalhes que mais tarde terão uma função a desempenhar.

Procura da ideia proveitosa

Por onde começar? Comece pelo exame das partes principais de seu problema, quando estas estiverem nitidamente dispostas e claramente concebidas, graças ao seu trabalho anterior, e quando a sua memória estiver receptiva.

Que posso fazer? Considere o problema sob diversos pontos de vista e procure contactos com seus conhecimentos previamente adquiridos.

Considere o seu problema por diferentes lados. Destaque as diferentes partes, examine os diversos detalhes, examine repetidamente os mesmos detalhes, mas de maneiras diferentes, combine-os diferentemente, aborde-os por diversos lados. Procure perceber algum significado novo em cada detalhe, alguma nova interpretação do conjunto.

Procure contactos com os seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Tente pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes. Tente reconhecer alguma coisa de familiar no que examina e perceber algo de útil naquilo que reconhecer.

Que posso perceber? Uma ideia proveitosa, talvez a ideia decisiva que indique, num relance, o caminho para chegar ao fim desejado.

Como pode uma ideia ser proveitosa? Ela lhe mostra todo o caminho ou parte dele; ela lhe sugere, com maior ou menor nitidez, como prosseguir. As ideias são mais ou menos completas. Já é uma sorte ter uma ideia qualquer.

Que posso fazer com uma ideia incompleta? Deve levá-la em consideração. Se parecer vantajosa, deve examiná-la mais demoradamente. Se parecer confiável, deve verificar até onde ela o leva a reconsiderar a situação. Esta se modificou graças à sua ideia proveitosa. Examine a nova situação por diversos lados e procure contactos com seus conhecimentos anteriormente adquiridos.

Qual a vantagem em tornar a fazer isso? É possível que tenha sorte e lhe surja uma ideia. Talvez a sua próxima ideia o leve directamente à resolução. Talvez precise ainda de mais algumas ideias proveitosas depois da próxima. Algumas delas talvez o levem por outro caminho. Não obstante, deve ser grato a todas as ideias novas, até às mais insignificantes, às nebulosas, às suplementares, que emprestam precisão às nebulosas ou tentam corrigir as menos felizes. Mesmo que, por algum tempo, não lhe ocorra qualquer nova ideia apreciável, deverá ficar agradecido se a sua concepção do problema tornar-se mais completa ou mais coerente, mais homogénea ou mais equilibrada.

Execução do plano

Por onde começar? Comece da ideia feliz que o levou à resolução. Principie quando se sentir seguro de que dominou a conexão principal e confiante em que pode proporcionar os detalhes menores que faltam.

Que posso fazer? Assegure o seu domínio. Realize detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já verificou serem viáveis. Verifique a correcção de cada passo, pelo raciocínio formal ou pela intuição, ou de ambas as maneiras. Se o seu problema é muito complexo, pode distinguir passos "grandes" e "pequenos", constituindo-se cada grande passo de diversos pequenos.

Qual a vantagem em assim proceder? Uma apresentação da resolução, na qual cada passo está correcto fora de qualquer dúvida.

Reflexão

Por onde começar? Pela resolução, completa e correcta em todos os seus detalhes.

Que posso fazer? Considere a resolução por diversos lados e busque contactos com seus conhecimentos adquiridos.

Considere os detalhes da resolução e procure torná-los tão simples quanto possível; examine as partes mais amplas da resolução e procure abreviá-las; tente perceber toda a resolução num relance. Procure modificar vantajosamente as partes maiores e menores da resolução, melhorá-la toda e inseri-la tão naturalmente quanto for possível, nos seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Examine o método que o levou à resolução, para caracterizá-lo e utilizá-lo em outros problemas. Examine o resultado e procure utilizá-lo em outros problemas.

Qual a vantagem em assim proceder? É possível que encontre uma outra resolução melhor, que descubra factos novos e interessantes. De qualquer maneira, se adquirir o hábito de verificar e examinar desse modo as suas resoluções, obterá alguns conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e assim desenvolverá a sua capacidade de resolver problemas.

Apêndice - Como resolver um problema

Primeiro	COMPREENDER DO PROBLEMA
É preciso compreender o problema	*Qual a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição?* É possível satisfazer a condição ? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adopte uma notação adequada. Separe as diversas partes da condição. É possível escrevê-las?
Segundo	ESTABELECER UM PLANO
Encontre a conexão entre os dados e a incógnita É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar	Já viu o problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente? *Conhece um problema relacionado com este?* Conhece um problema que lhe pode ser útil? *Considere a incógnita!* E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. *Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utiliza-lo?* É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar o seu método. Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua solução? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte as definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? É possível obter dos dados alguma coisa útil? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?
Terceiro	EXECUTAR O PLANO
Execute seu plano	Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo.* É possível verificar claramente que o passo está correcto? É possível demonstrar que ele está correcto?
Quarto	REFLECTIR SOBRE O TRABALHO REALIZADO
Examine a solução obtida	É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*