

A Experiência Matemática no Ensino Básico

Programa de Formação Contínua
em Matemática para Professores
dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Ministério da Educação 


Direcção-Geral de Inovação
e de Desenvolvimento Curricular

Ana Maria Roque Boavida
Ana Luísa Paiva
Graça Cebola
Isabel Vale
Teresa Pimentel

Consultora
Isabel Serra

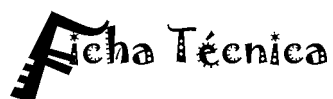
Biblioteca Nacional – Catalogação na Publicação

A experiência matemática no ensino básico/Ana Maria Roque Boavida... [et al.]

ISBN 978-972-742-290-6

I – BOAVIDA, Ana, 1955-

CDU 371
51
373



A Experiência Matemática no Ensino Básico

Programa de Formação Contínua em Matemática
para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Editor

Ministério da Educação
Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Autores

Ana Maria Roque Boavida (coordenação), Ana Luísa Paiva,
Graça Cebola, Isabel Vale, Teresa Pimentel

Consultora

Isabel Serra

Design

Manuela Lourenço

Execução Gráfica

Editorial do Ministério da Educação

Tiragem

7500 Exemplares

Depósito Legal

272 931/08

ISBN

978-972-742-290-6



RESOLUÇÃO de PROBLEMAS em MATEMÁTICA

Aprendemos a resolver problemas resolvendo-os.

(Polya, 1945)



Introdução

Não se pode conceber a Matemática sem conceitos, definições, axiomas, teoremas, demonstrações, algoritmos ou fórmulas. São partes integrantes desta ciência. Contudo, os problemas – a sua formulação e resolução – são a essência da Matemática.

A resolução de problemas tem vindo a ser reconhecida como uma actividade relevante no currículo da Matemática escolar desde a publicação de *An agenda for action* (NCTM, 1980) até aos dias de hoje. De um modo geral, os professores estão atentos à importância deste processo matemático na aprendizagem, não só porque os documentos curriculares nacionais e internacionais apontam nesse sentido (ME, 2001; NCTM, 2000; Ponte et al., 2007), mas também porque os resultados dos estudos internacionais (TIMSS, 1996; PISA, 2003) não são nada animadores no que diz respeito ao desempenho dos alunos na resolução de problemas. A literacia matemática dos alunos é, num destes estudos, determinada pelo modo como usam os conhecimentos, as capacidades e as atitudes na resolução de problemas. Assim, é necessário propor-lhes experiências diversificadas que permitam desenvolver as suas capacidades de resolução de problemas, de modo a poderem tirar partido da Matemática ao longo da vida.

Neste capítulo realça-se a importância da resolução de problemas enquanto processo matemático crucial para a aprendizagem da Matemática. Note-se que não se pretende apresentar a resolução de problemas como a única alternativa para a actividade matemática na sala de aula. A aprendizagem da Matemática envolve outras experiências fundamentais entre as quais se incluem actividades mais rotineiras que apelam, nomeadamente à memória e ao treino. O que se defende é que este tipo de actividades deve ser complementado com outras mais desafiantes, como seja a resolução de problemas. Neste âmbito, começa-se por clarificar o significado de alguns termos frequentemente usados e, em seguida, apresentam-se diferentes tipos de problemas recorrendo a exemplos ilustrativos. Além disso, abordam-se estratégias de resolução e de formulação de problemas e foca-se a questão da selecção e enriquecimento de tarefas.



Problemas e estratégias de resolução

Numa perspectiva educacional, formular e resolver problemas é uma componente essencial de fazer Matemática e permite o contacto com ideias matemáticas significativas. É, também, uma oportunidade de envolver os alunos, desde muito cedo, em questões de modelação matemática que, tradicionalmente, são consideradas como tópicos de Matemática mais avançada.

Alguns autores referem que a resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma actividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a racionar matematicamente. A resolução de problemas pode, também, ser perspectivada num sentido mais abrangente, designando uma abordagem de ensino da Matemática: *ensino da Matemática através da resolução de problemas*. Aqui os problemas estão em primeiro plano, enquanto via facilitadora da aprendizagem. É esta perspectiva da resolução de problemas que se adopta neste capítulo.

Podem considerar-se duas componentes principais na resolução de problemas. A primeira, a *exploração*, consiste na descoberta de possíveis relações e usa o raciocínio e os processos indutivos e as estratégias que levam à procura da solução. A segunda, a *confirmação*, envolve testar essas relações e usa raciocínio e processos dedutivos, incluindo apresentar contra-exemplos e justificar as generalizações. O rigor de tais justificações depende do nível do aluno e da natureza do problema; algumas podem ser mais formais e outras usar palavras próprias para explicar porque é que a generalização funciona. Acrescenta-se, ainda, nalgumas situações, a componente *criativa* na qual cada um faz as suas próprias explorações, o que alguns autores chamam *extensões*. Esta componente criativa da resolução de problemas ajuda o professor e os alunos a formular novos problemas e a criar experiências mais ricas a partir dos problemas iniciais. Neste processo, para além dos aspectos cognitivos há que ter em conta também factores afectivos. Deve-se reconhecer a existência dos problemas e estar motivado para os compreender. É importante encorajar a exploração de ideias pelos alunos e o uso de modelos concretos para definir possíveis estratégias de resolução.

Um problema ou a sua resolução originam, na maior parte das vezes, problemas adicionais ou conceitos teóricos que por sua vez suscitam novos problemas matemáticos. Além disso, a resolução de problemas:

- proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação;
- fomenta o raciocínio e a justificação;
- permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares;
- apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.

Em suma, o entendimento que aqui se apresenta de resolução de problemas é o de um processo que deve orientar a actividade matemática na sala de aula do 1.º ciclo, proporcionando um contexto de aprendizagem em que se apresentam novos conceitos ou se aprofundam e aplicam conceitos já adquiridos. Ensinar Matemática através da resolução de problemas proporciona uma visão desta disciplina favorável ao estabelecimento de ligações dentro da própria Matemática, com outras áreas do currículo e com o dia a dia dos alunos, permitindo-lhes aprender como utilizar e aplicar a Matemática fora da escola.

1.2.1 O que é um problema?

Entre os vários tipos de tarefas a que o professor pode recorrer na sala de aula, umas dirigem-se mais à memória e ao treino enquanto outras estão mais direccionadas para processos mais complexos de pensamento. De acordo com Ponte (2005), as tarefas podem ser analisadas segundo duas dimensões principais: uma relacionada com o nível de estruturação e outra com o desafio matemático que suscitam. A estruturação da tarefa está associada ao grau de explicitação das questões colocadas, o que conduz a tarefas fechadas e a tarefas abertas. O desafio prende-se com o grau de dificuldade que se relaciona com conhecer-se, ou não, o processo de resolução. Assim, o desafio pode variar entre reduzido e elevado. Cruzando essas duas dimensões, Ponte propõe quatro tipos essenciais de tarefas: exercício (fechada, desafio reduzido); problema (fechada, desafio elevado); exploração (aberta, desafio reduzido); e investigação (aberta, desafio elevado).

Naturalmente, a distinção entre tarefas considerando a sua natureza nem sempre é fácil e, além disso, nenhuma categorização esgota todos os tipos de tarefas que se usam na sala de aula. Na verdade, poder-se-iam acrescentar outras dimensões como, por exemplo, a duração do tempo de resolução e o contexto que as enquadra.

Uma vez que o tema deste capítulo é a resolução de problemas, é importante distinguir a noção de *problema* de outras que com ela, por vezes, se identificam.

Há várias definições de problema. Adoptando a proposta pelo ME (2001), “os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução” (p.68). Assim, tem-se um problema quando se está perante uma situação que não pode resolver-se utilizando processos conhecidos e standardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização do que se designa por estratégias. Caso contrário, isto é, se a situação pode ser resolvida utilizando processos *para nós* conhecidos, repetitivos ou mecanizados, que conduzem directamente à solução, estamos perante um exercício. Deste modo, ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe. Por exemplo, a questão *Calcula o produto 8x6* pode ter várias interpretações conforme o nível de conhecimentos de quem a enfrenta: um facto específico se a resposta é automática e faz recurso à memória; um exercício se mobiliza treino ou mecanização; ou um problema se envolve a descoberta de um caminho.

Importa que os problemas tenham as seguintes características: a) sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível; b) sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes; c) possam ter mais do que um processo de resolução; d) possam integrar vários temas.

Para um bom ensino da Matemática é essencial que o professor seja capaz de distinguir os vários tipos de tarefas, de modo a seleccionar as mais adequadas aos objectivos que tem em vista. Apresentam-se, em seguida, exemplos de um *exercício* (tarefa 1) e de um *problema* (tarefa 2), para alunos do 4.º ano de escolaridade:

Calcular produtos

1. Calcula o produto 83×6 .
2. Preenche o espaço em branco de modo a obter uma afirmação verdadeira:
.... $\times 6$ é um número compreendido entre 45 e 52.

Repare-se que na tarefa 1, basta aplicar o algoritmo da multiplicação que, em princípio, os alunos do 4.º ano já conhecem. Em contrapartida, na tarefa 2, precisam de recorrer a processos de raciocínio que vão para além do mero conhecimento da tabuada.

Tradicionalmente, quando se fala em resolução de problemas no ensino da Matemática, pensa-se em problemas que têm um enunciado definido e estruturado, uma e apenas uma solução e um processo de resolução pré-determinado que conduz à resposta certa ou errada. Contudo, como se referiu, um problema pode ser colocado num sentido mais aberto, suscitando nos alunos a procura de diferentes métodos e caminhos, e não apenas de uma resposta. Trata-se do que alguns autores designam por *investigações* (por exemplo, Ponte, 2005) ou *problemas abertos* (Stevenson, 2001), termos que, nesta brochura, se consideram sinónimos. Um exemplo de um *problema aberto*, adequado aos alunos dos dois primeiros de escolaridade, é: *Descobre o que consegues sobre o número 25*. Algumas das descobertas podem ser: (a) $25 = 10 + 10 + 5$; (b) é um número ímpar; (c) é igual a 5×5 ; (d) é um produto de factores iguais; (e) é $100 : 4$; (f) são duas dúzias mais um.

Até aqui pretendeu-se clarificar o significado de vários termos associados à resolução de problemas e não valorizar um tipo de tarefas em detrimento de outras, pois todas têm o seu lugar na experiência matemática dos alunos. Focam-se, em seguida, características de diferentes tipos de problemas.



1.2.2 Diferentes tipos de problemas

Na sala de aula apresentam-se tarefas variadas com objectivos diversos. Também no âmbito da resolução de problemas, se podem explorar diferentes tipos de problemas que o professor deve seleccionar de acordo com os fins em vista. Deste modo, analisam-se de seguida alguns problemas focando a atenção no enunciado e no processo de resolução.

Quando se está perante um problema, é importante saber se o enunciado fornece a informação necessária para a sua resolução. Na vida quotidiana, geralmente isto não acontece: tem de se seleccionar entre vários dados aqueles que interessam para a situação de modo a obter uma solução satisfatória. De facto, é a identificação e selecção da informação que torna muitos problemas difíceis. Aos alunos devem ser proporcionadas oportunidades de seleccionar dados relevantes e identificar informação em falta, que é necessária para resolver a situação. *As compras da Inês* ilustram um *problema com informação insuficiente* (tarefa 1) e um *problema com informação extra* (tarefa 2).

As compras da Inês

1. A Inês comprou dois CD's ao Luís. Decidiu vender o 1.º CD por 3 euros e o 2.º CD por 5 euros. Qual foi o lucro que a Inês obteve com a venda?
2. A Inês comprou três CD's ao Luís por 1, 3 e 5 euros. Vendeu os dois primeiros por 4 euros cada. Qual foi o lucro que a Inês obteve com a venda?

Há várias tipologias de classificação de problemas matemáticos que diferem segundo os autores (Vale & Pimentel, 2004). Neste capítulo, opta-se por uma classificação simples, adequada ao 1.º ciclo, em que se consideram apenas problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos.

Problemas de cálculo

Os problemas de cálculo requerem decisões quanto à operação ou operações a aplicar aos dados apresentados. Os alunos lêem o problema, avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efectuam uma ou mais operações que consideram apropriadas usando os dados do enunciado. Neste âmbito, podem diferenciar-se *problemas de um passo* e *problemas de mais passos* ilustrados, respectivamente, através das tarefas *Vedar o quintal* e *Pintar mesas*.

Vedar o quintal

O quintal da Sandra é quadrado com 5 metros de lado. Quantos metros de rede são necessários para vedar o quintal?

Pintar mesas

O Luís pintou três mesas na segunda-feira e quatro na terça. Na quarta à noite precisa de entregar uma dúzia. Quantas mesas precisa de pintar na quarta-feira?

Vedar o quintal é um *problema de um passo*, pois, para o resolverem, os alunos necessitam apenas de utilizar uma operação. Em contrapartida, em *Pintar mesas*, um *problema de mais passos*, há que recorrer a mais do que uma operação para chegar à solução.

Os problemas de cálculo são os que, nos manuais escolares, normalmente aparecem no fim de um tema. Têm algumas potencialidades. Nomeadamente, proporcionam aos alunos a oportunidade de aplicarem conceitos e destrezas previamente aprendidos e praticarem esta aplicação. No entanto, o risco de lhes propor exclusivamente estes problemas reside em poderem levá-los a leituras demasiado rápidas, a análises superficiais ou a respostas sem qualquernexo. Ilustra-se, em seguida, esta situação a partir de resoluções apresentadas por alunos para três questões que lhes foram colocadas.

Questões	Resoluções e respostas de alunos			
1. Um pastor tem 120 ovelhas e 3 cães. Quantos anos tem o pastor?	$\begin{array}{r} 120 \\ + 3 \\ \hline 123 \end{array}$	$\begin{array}{r} 120 \\ - 3 \\ \hline 117 \end{array}$	$\begin{array}{r} 120 \\ \times 3 \\ \hline 360 \end{array}$	$\begin{array}{r} 120 \overline{) 3} \\ 00 \ 40 \\ 0 \end{array}$
	Resposta: O pastor tem 40 anos.			
2. Um agricultor tem 12 vacas. Todas morreram menos 5. Quantas vacas restam?	$12 - 5 = 7$			
	Resposta: Restam 7 vacas.			
3. A Ana tem 5 bolas, que são mais 3 do que as da Rita. Quantas bolas tem a Rita?	$5 + 3 = 8$			
	Resposta: A Rita tem 8 bolas.			

Estas resoluções permitem evidenciar dois aspectos. Por um lado, os alunos podem pensar que todos os problemas têm de ter forçosamente solução que se obtém à custa de uma das quatro operações elementares que conhecem, o que é absurdo no exemplo 1. Por outro lado, podem associar determinadas palavras a uma operação, como se vê nos exemplos 2 e 3.

No seu conjunto, os exemplos mostram os perigos de o aluno se “lançar às cegas” na manipulação simbólica sem compreender o que está em causa com o problema nem o significado das operações e dos símbolos. A primeira questão não tem dados suficientes, mas há uma tentativa de lhe dar uma resposta plausível com os dados disponíveis. Aparentemente a aluna, que apresentou a resposta, partiu do princípio de que todos os problemas têm solução e, assim, utiliza as operações que conhece e vai avaliando o resultado obtido, até encontrar um que lhe parece adequado. No segundo exemplo, tem-se a tentação de realizar a subtração $12 - 5$ e dar como resposta 7 porque o enunciado refere *menos 5*. A resposta correcta é 5, mas para lá chegar tem de se pensar e interpretar o enunciado. O mesmo acontece no terceiro exemplo. Os números 5 e 3 ligados pela palavra *mais* induzem a realização da adição $5 + 3$ originando a resposta errada 8.

Salienta-se, no entanto, que o tipo de respostas apresentadas pelos alunos às questões está muito relacionado com o ensino realizado e com a cultura de sala de aula, já que se as questões forem colocadas noutros ambientes, nomeadamente em contextos não escolares, a percentagem de respostas despropositadas diminui muito (Baruk, 1985).

Outra situação que é necessário referir é a das condicionantes reais do contexto do problema que podem fazer com que a solução encontrada, embora matematicamente correcta, não faça sentido na realidade. Observe-se o exemplo:

Temos quatro espelhos de 2,5 metros de largura. Quantos espelhos de 1 metro de largura se podem obter?

Se o aluno se limitar a multiplicar 4 por 2,5 para obter a largura total e, de seguida, a dividir por 1 chega à conclusão que se podem obter 10 espelhos, o que, na realidade, não tem interesse já que conduziria a que dois dos espelhos tivessem de ter uma emenda. Na verdade, na vida real esta situação, normalmente, não é desejável.

Problemas de processo

Os *problemas de processo* diferem dos de cálculo porque não podem ser resolvidos apenas por selecção da(s) operação(ões) apropriada(s). Estão, geralmente, embutidos em contextos mais complexos e requerem um maior esforço para compreender a Matemática necessária para chegar à solução, uma vez que tem de se recorrer a estratégias de resolução mais criativas para descobrir o caminho a seguir. Requerem persistência, pensamento flexível e uma boa dose de organização.

Estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou para aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos. Colocam questões que apelam ao envolvimento dos alunos e proporcionam experiências matemáticas ricas e significativas (NCTM, 2000) requerendo da sua parte o uso de várias estratégias. O sucesso reside, muitas vezes, na capacidade que cada um tem de compreender e identificar a estrutura matemática do problema. Observe-se, por exemplo, o problema *A compra e venda de CD's*.

A compra e venda de CD's

A Inês comprou um CD por 3 euros e vendeu-o ao Luís por 5 euros. Mais tarde comprou-o de volta ao Luís por 7 euros e tornou a vendê-lo por 9 euros. Será que a Inês ganhou ou perdeu com esta compra e venda?

Este problema não tem uma solução óbvia e para o resolver o aluno tem de ir para além dos aspectos enganadores nele implicados, o que pode aguçar o seu interesse. Na verdade, para o resolver pode pensar-se de dois modos diferentes:

1. Na primeira transacção, a Inês comprou por 3 euros e vendeu por 5 euros logo ganhou 2 euros (+2). Ao fazer a segunda transacção, como comprou por 7 euros o que tinha vendido por 5 perdeu 2 euros (-2), o que neutraliza o primeiro ganho (+2-2=0). De seguida, vendeu o mesmo por 9 euros tendo ganho assim no total 2 euros (+2).
2. Ao fazer a primeira transacção, a Inês comprou por 3 euros e vendeu por 5 euros logo ganhou 2 euros (+2). Na segunda transacção a Inês comprou por 7 euros e vendeu por 9 euros, logo ganhou 2 euros (+2). Assim, no total, o lucro foi de +2+2=4 euros.

Afinal qual foi o lucro, dois ou quatro euros? Podemos justificar o modo de pensar correcto por duas vias diferentes:

- A segunda transacção só por coincidência é efectuada sobre o mesmo objecto. Experimente pensar que na segunda vez a Inês foi comprar não um CD mas um livro, e não ao Luís mas ao João. Como estes acontecimentos são independentes, já é claro verificar que a Inês ganhou dois euros em cada transacção, donde ganhou no total 4 euros.

- Podemos supor que temos no bolso uma determinada quantia, por exemplo 10 euros, e, fazendo os cálculos correspondentes às transacções, comparar a quantia final com a inicial: $10-3=7$; $7+5=12$; $12-7=5$; $5+9=14$; $14-10=4$. Ou seja, houve um lucro de 4 euros.

Problemas abertos

Os *problemas abertos*, também aqui designados por *investigações*, podem ter mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correcta. Para os resolverem, os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjecturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão.

Uma possibilidade de clarificar o significado de *problema aberto* é confrontar este tipo de problemas com problemas de cálculo e de processo. Para o efeito, analise-se uma sucessão de tarefas – *Caixa de molas* (problema de cálculo), *Os trabalhos de Catarina* (problema de processo) e *Mais guardanapos* (problema aberto) – que têm por contexto a actividade de pendurar guardanapos usando molas.

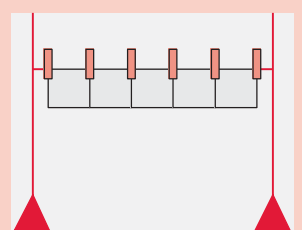
Caixa de molas

A Catarina usou três molas para pendurar três guardanapos e a Ana usou duas molas para pendurar um guardanapo. As duas amigas usaram uma caixa com meia dúzia de molas. Descubra se as molas chegaram para pendurar os guardanapos.

Trata-se de um *problema de cálculo* que utiliza dois passos. Adicionando as molas da Catarina com as da Ana obtemos $3+2=5$. Como a caixa tem 6 molas e 5 é menor que 6, as molas chegam. Esta tarefa pode ser transformada noutra, com um grau de desafio mais elevado para os alunos, que poderá ser formulada a exemplo de *Os trabalhos da Catarina*.

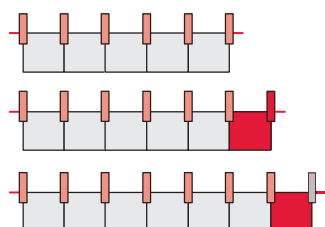
Os trabalhos da Catarina

A Catarina vai pôr a secar muitos guardanapos pendurando-os, ordenadamente, como se mostra. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 5, 6, 7, 10 ou 20 guardanapos.



Há diferentes modos de resolver este problema, mas há apenas uma solução. É um *problema de processo*, já que o aluno não se limita a aplicar uma ou mais operações conhecidas. Tem de fazer algumas experiências para chegar a uma regra que lhe permita descobrir e dar a resposta para 20 guardanapos sem ter que fazer a contagem das molas uma a uma. Por exemplo, usar um desenho e/ou uma tabela, descobrir o padrão e generalizar. Inicialmente, começa por particularizar para alguns casos. Para calcular o número de molas necessárias para 20 guardanapos sem ser necessário

fazer todas as operações até lá chegar, tem de identificar a lei de formação presente na relação entre as sequências numéricas em causa, para poder concluir que o número de molas é igual ao número de guardanapos mais um:

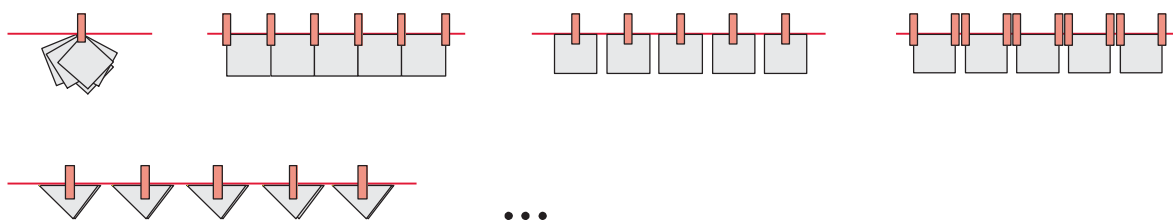


N.º de guardanapos	N.º de molas
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
...	...
20	21

Mais guardanapos

A Catarina vai pôr a secar guardanapos. Porque é uma rapariga organizada, pendura, todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos.

Aparentemente esta situação parece idêntica à anterior mas não é. Enquanto em *Os trabalhos da Catarina* é dado o modo como os guardanapos estão a secar, aqui é necessário descobrir as várias maneiras de os colocar a secar. Além disso, nada é dito nem apresentado sobre o formato do estendal (pode ser, por exemplo, circular) nem sobre o número de cordas que tem. *Mais guardanapos* é, assim, um problema aberto que permite várias abordagens. Por exemplo, se a Catarina tiver 5 guardanapos, o estendal tiver uma só corda e não for circular, pode pô-los a secar de diferentes modos:



Para cada um destes modos de secar os guardanapos há um número de molas correspondente e, claro, que para 30 guardanapos, as possibilidades aumentam. Basta reparar, por exemplo, que se podem agrupar os guardanapos em conjuntos de 1, 2, 3, 5,... elementos, ou seja os divisores de 30 (claro que, se o número de guardanapos por mola for demasiado grande, o problema torna-se fisicamente impossível). O professor deve discutir com os alunos se há modos equivalentes quanto ao número de molas antes de analisar cada caso individualmente, seguindo um processo análogo ao apresentado na tarefa *Os trabalhos da Catarina*.

Uma possível extensão desta tarefa é colocar a questão ao contrário, ou seja: *Se tivermos um determinado número de molas, quantos guardanapos podemos pendurar?*

Note-se que, numa investigação, poderá haver alunos que fazem uma exploração total da questão e outros que só descobrem algumas possibilidades, mas *todos* têm oportunidade de fazer alguma descoberta, de acordo com os seus conhecimentos e capacidades. Cabe ao professor acompanhar o trabalho dos alunos e ir fornecendo pistas de modo a que possam ir desenvolvendo, cada vez mais, o seu raciocínio indutivo e dedutivo.

Realça-se, aqui, a importância das sínteses finais em grande grupo, em que os alunos podem apresentar à turma o seu trabalho. Neste processo devem ser incentivados a verbalizar as descobertas que vão fazendo (por exemplo, *o número de molas necessárias é igual ao número de guardanapos mais um*).

Tanto a tarefa *Os trabalhos de Catarina* como *Mais guardanapos*, para além de permitirem a exploração de conceitos numéricos, são favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico, preparando os alunos para a aprendizagem da álgebra.



1.2.3 Estratégias

Para resolver qualquer problema, os alunos necessitam de ler (ou de quem lhes leia) o problema; compreender as quantidades e relações envolvidas; traduzir a informação em linguagem matemática, efectuar os procedimentos necessários e verificar se a resposta obtida é plausível.

Polya, (2003), descreveu um plano em quatro fases que pode ajudar a resolver um problema:

- compreender o problema;
- delinear um plano, ou seja, seleccionar uma (ou mais) estratégia(s);
- desenvolver esse plano;
- avaliar os resultados.

Embora este modelo tenha sido sugerido para problemas bastante mais complexos do que aqueles com que se trabalha no 1.º ciclo do ensino básico, as referidas fases são também úteis na abordagem de problemas simples. Nem sempre é fácil distinguir a segunda da terceira fase, já que à medida que se estabelece o plano este começa imediatamente a ser desenvolvido. Assim, pode-se considerar um modelo simplificado de resolução de problemas:

- ler e compreender o problema;
- fazer e executar um plano;
- verificar a resposta.

Vários investigadores, entre os quais Polya, identificaram um conjunto de estratégias que podem ajudar os alunos a atacar o problema ou a caminhar no sentido de obter a solução, adquirindo, simultaneamente, destrezas úteis na resolução de outros problemas. Acredita-se que se aprende a resolver problemas, sobretudo se se for persistente e disciplinado na forma de pensar e de estruturar o pensamento e se se for

capaz de comunicar o que se pensou. Neste sentido, a familiaridade com o uso de estratégias irá permitir ao aluno passar gradualmente de uma situação fechada para outra mais aberta sem se sentir perdido. Estas estratégias podem ser aplicadas a muitos problemas, sós ou combinadas com outras. Algumas das estratégias, que podem ser utilizadas no ensino básico, são:

- Fazer uma simulação/dramatização;
- Fazer tentativas;
- Reduzir a um problema mais simples;
- Descobrir um padrão;
- Fazer uma lista organizada;
- Trabalhar do fim para o princípio.

Em combinação com estas estratégias recorre-se, muitas vezes, a diferentes representações como sejam *Fazer um desenho ou esquema* ou *Usar uma tabela*.

É importante distinguir o modelo de Polya das estratégias. O modelo proporciona uma visão geral de como nos devemos movimentar na resolução de um problema, enquanto as estratégias são ferramentas que, a maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas. O conhecimento matemático e as estratégias de raciocínio devem ser aprendidas e usadas em simultâneo e não isoladamente.

Apresentam-se, em seguida, exemplos de problemas cuja resolução é facilitada pelo recurso a uma ou várias das referidas estratégias.

Iogurtes

O André e o Bernardo foram comprar iogurtes para o grupo de amigos com quem estão acampados. Uns iogurtes são vendidos em embalagens de quatro e outros de seis. Em conjunto, compraram 12 embalagens, num total de 58 iogurtes. Descobre quantas embalagens de cada tipo compraram os dois rapazes?

A estratégia a utilizar será *Fazer tentativas*. No entanto, estas tentativas não são feitas às cegas mas atendendo às condições do enunciado. Na primeira tentativa, podemos começar com o mesmo número para os dois tipos de embalagens e, face ao resultado, vamos ajustando os valores.

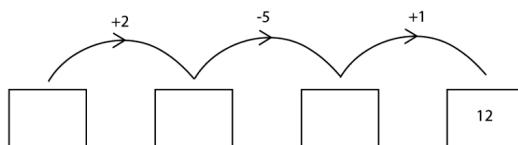
Total de embalagens	Embalagens de 4	Embalagens de 6	Total de iogurtes
12	6	6	$6 \times 4 + 6 \times 6 = 24 + 36 = 70$
12	8	4	$8 \times 4 + 4 \times 6 = 32 + 24 = 56$
12	7	5	$7 \times 4 + 5 \times 6 = 28 + 30 = 58$

Em conclusão, foram compradas sete embalagens de quatro iogurtes e cinco de seis iogurtes.

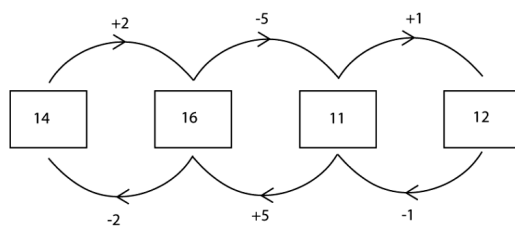
Os passageiros do autocarro

Um autocarro partiu da estação com alguns passageiros. Na primeira paragem entraram dois passageiros; na segunda saíram cinco e na terceira entrou um, tendo chegado ao destino doze passageiros. Quantos passageiros iniciaram a viagem?

Neste problema conhece-se a situação final e quer-se conhecer a inicial, logo usa-se a estratégia *trabalhar do fim para o princípio*. É também útil *fazer um esquema* onde se começa por identificar e relacionar os dados.



Seguidamente o esquema poderá ser preenchido do fim para o princípio, com recurso às operações inversas, o que permite chegar à situação de partida: iniciaram a viagem 14 passageiros.



Ginástica rítmica

Num número de ginástica as oito participantes devem ficar unidas duas a duas com fitas coloridas. Quantas fitas são necessárias para realizar o número?

Pode começar-se por *reduzir a um problema mais simples*, supondo que só há duas, três ou quatro participantes e determinar o número de fitas em cada caso. Com alunos mais novos será aconselhável fazer uma *dramatização* para determinar esse número ou, em alternativa, *fazer um esquema*.

2 participantes
1 fita

3 participantes
3 fitas

4 participantes
6 fitas

5 participantes
10 fitas

Pode, ainda, *fazer-se uma tabela* que relacione o aumento do número de fitas com o do número de participantes. Será importante que os alunos não necessitem de fazer todas as experiências até ao número pedido, mas que descubram um padrão que relacione o número de fitas com o número de participantes.

Número de participantes	Número de fitas
2	1
3	$3=1+2$
4	$6=3+3$
5	$10=6+4$

Este padrão pode incidir na relação entre o número de fitas em cada caso e o anterior número de fitas. No entanto, se o número de participantes fosse muito maior, esta descoberta não seria de grande ajuda, já que, para cada caso, temos que conhecer o que o precede. Mais eficaz seria o aluno procurar uma relação directa entre o número de fitas e o número de participantes.

Número de participantes	Número de fitas
2	1
3	$3=1+2$
4	$6=3+3=1+2+3$
5	$10=6+4=1+2+3+4$

A descoberta de uma relação deste tipo (observar tabela anterior) permite estabelecer a seguinte conjectura: o número de fitas necessárias para um número qualquer de participantes obtém-se adicionando os sucessivos números naturais desde 1 até ao número anterior de participantes.

Este problema pode, ainda, ser resolvido utilizando outra estratégia: *fazer uma lista organizada*.

Designando os oito participantes por A, B, C, D, E, F, G, H ter-se-á:

AB	BC	CD	DE	EF	FG	GH
AC	BD	CE	DF	EG	FH	
AD	BE	CF	DG	EH		
AE	BF	CG	DH			
AF	BG	CH				
AG	BH					
AH						

A cada par de participantes corresponde uma fita, donde se conclui que são necessárias 28 fitas.

Grande parte dos alunos consegue descobrir os seus próprios processos de resolução. Assim, o professor, em vez de ensinar prescritivamente um conjunto de estratégias de resolução de problemas, pode propor-lhes várias tarefas que favoreçam o aparecimento dessas estratégias. A sua posterior identificação e sistematização irão dotá-los

de um repertório de estratégias que lhes permitirá resolver vários problemas diferentes ou o mesmo problema de modos diferentes. Por conseguinte, quando uma estratégia falha há sempre outra a que poderão recorrer, o que os ajuda a ganhar confiança na sua capacidade para resolver problemas. Neste contexto, os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, que são um meio para introduzir novos conceitos e que oferecem um contexto para usar e desenvolver diferentes capacidades. Deste modo, a resolução de problemas não é um tópico específico a ser ensinado mas um processo que deve permear toda a aprendizagem da Matemática.



Formulação de problemas

A par da resolução de problemas, a formulação de problemas é uma actividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas, é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso.

O papel do professor é significativamente diferente quando se trata de incentivar os alunos a resolverem ou a formularem problemas. Na resolução de problemas, é o professor quem, à partida, formula as questões, cabendo ao aluno responder às solicitações que lhe são feitas. Na formulação de problemas, o aluno é desafiado a problematizar situações do dia a dia usando a sua própria linguagem, vivências e conhecimentos. Neste âmbito, o professor deve dar especial atenção a vários aspectos. Um é usar as formulações apresentadas pelos alunos no sentido de as orientar para uma exploração matematicamente rica. Outro é saber aproveitar as situações que ocorrem na sala de aula, quer sejam provocadas ou ocasionais, para proporcionar actividades de formulação de problemas: um aniversário, uma visita de estudo ou a celebração de um Dia Mundial.

Suponha-se, por exemplo, que um aluno levou para a escola um prospecto de um novo armazém de artigos desportivos que tinha aberto na zona e que entusiasmou os colegas. Face a esta situação, o professor pode pedir aos alunos para formularem, em pares, um problema que utilize os dados do prospecto. Um outro ponto de partida, com fortes potencialidades educativas, pode ser solicitar aos alunos que formulem questões com base na tabela dos 100, apresentada em seguida.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Perante este desafio, saber colocar questões é vital. É, precisamente, esta característica que alguns autores usam para distinguir *problema de investigação* (Ernest, 1996). Se um aluno coloca a questão "Qual é o primeiro número da tabela?" e outro coloca a questão "Que diferença existe entre os sucessivos números de cada coluna?",



o professor deve, com diplomacia, orientar a turma para a exploração desta última pois proporciona uma actividade matematicamente mais rica.



1.3.1 Estratégias de formulação de problemas

Há algumas estratégias que poderão ser úteis para facilitar o processo de formulação de problemas. Apresentam-se, em seguida, duas dessas estratégias: *E se em vez de?* e *Aceitando os dados*. A primeira, mais directamente relacionada com a modificação de problemas pelos alunos e a segunda com a criação de problemas.

E se em vez de?

A partir da informação que um determinado problema possui, identifica-se o que é conhecido (os dados, as propriedades ou atributos envolvidos), o que é pedido (o desconhecido, a resposta ou a solução) e as restrições que a resposta ao problema pode envolver. Modifica-se um ou mais destes aspectos e formulam-se perguntas que, por sua vez, poderão gerar mais modificações e mais perguntas.

Quando se trabalha no âmbito de conjuntos numéricos, mudar o domínio pode ser um modo interessante de ter novos problemas. A este propósito observe-se o seguinte exemplo que poderá ser utilizado com alunos a partir do 3.º ano: *Quais as dimensões que um terreno rectangular pode ter de modo a que a sua área seja 20 unidades?*

Se se trabalhar num papel quadriculado está implícito que as soluções serão apenas números inteiros. Com alunos com conhecimentos matemáticos mais profundos pode sugerir-se que abandonem as quadriculas e analisem onde isso os leva. Uma forma natural de o conseguir será partir de uma solução inteira, por exemplo 5×4 , e passar a dimensão 4 para o dobro verificando que, para que se mantenha a área, a outra dimensão, 5, terá de passar para a metade. Aparece, assim, uma extensão do problema ao conjunto dos decimais e a busca de outras soluções nesse conjunto.

Outra possibilidade é o professor começar por sugerir a modificação de problemas que sejam familiares aos alunos. Considere-se o exemplo *Os queques da avó Bia*.

Os queques da avó Bia

A avó Bia fez 12 queques para o lanche dos netos e amigos. Nesse dia estão apenas dois meninos e cada um come o mesmo número de queques. Quantos bolos come cada menino?

Este problema pode ser reformulado de diversos modos. A maneira mais simples será modificar o número de queques ou o número de crianças. Algumas das mudanças nos números não afectam a dificuldade do problema mas outras modificam-na (e.g. 18 queques para 6 crianças, ou 12 queques para 8 crianças ou ainda 10 queques para 3 crianças). Outras hipóteses de reformular o problema *Os queques da avó Bia* são torná-lo num problema mais aberto (exemplos 1 e 3), trocar o conhecido do problema pelo desconhecido (exemplo 2) em que deixámos de saber quantos são os queques mas sabemos quantos são os meninos, ou ainda mudar o contexto, mantendo a sua estrutura (exemplo 4). Na verdade a mudança de contexto de um problema é uma das estratégias mais utilizadas na sala de aula.

Ainda os queques da avó Bia

1. A avó Bia fez 12 queques para o lanche dos netos e amigos. Distribui-os, igualmente, por todos os meninos, mantendo-os inteiros. Quantos meninos é que, nestas condições, a avó Bia pode ter a lanchar?
2. Se hoje lancham 3 meninos e cada um come 2 queques, quantos queques é que a avó distribuiu?
3. A avó Bia fez muitos queques para o lanche dos netos e amigos. Ela distribuiu-os igualmente por todas as crianças, mantendo-os inteiros. Quantas crianças é que ela pode ter a lanchar nestas condições?
4. Doze amigos vão acampar e têm apenas 2 tendas disponíveis. Decidiram que ficaria o mesmo número de amigos em cada tenda. Quantos ficam em cada uma das tendas?

Quando se encorajam os alunos a responder a questões do tipo “e se em vez de ...?” ou “o que é que acontece se ...?” está-se também a incentivar a formulação de problemas e corresponde a uma fase que alguns autores chamam de *extensão do problema*.

Aceitando os dados

Solicitar aos alunos que *criem* os seus próprios problemas, é uma actividade também rica e interessante, mas que deve ser realizada apenas depois de terem alguma familiaridade, em etapas anteriores, como a modificação de problemas. De facto, a actividade de invenção sem um suporte prévio, pode levar os alunos a fantasiar, simplesmente, criando problemas sem nenhuma ligação à Matemática ou então propondo problemas tão complicados que nem os conseguem resolver. Deste modo, o professor deverá impor algumas regras e objectivos, recorrendo à utilização da estratégia que se designa por *aceitar dados*. Esta estratégia parte de uma situação estática, ou seja, de uma expressão, figura, tabela, definição, condição, ou simplesmente de um conjunto de dados ou informações, sobre os quais se formulam questões. Para a explorar, o professor pode recorrer e apresentar aos alunos situações ou informações em prospectos, jornais, livros, etc. Observem-se alguns exemplos.

Partindo de uma expressão

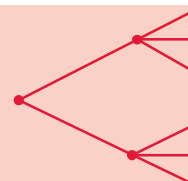
Inventa um problema que possa ser traduzido pela expressão

$$250 : 5 = 50$$

Uma possibilidade de problema: *temos 250 g de rebuçados e queremos fazer 5 saquinhos para prendas com a mesma quantidade. Que peso deverá levar cada saquinho?*

Partindo de um diagrama

Constrói um texto que traduza uma situação de multiplicação que recorra ao diagrama em árvore.



Uma possibilidade de problema: *se tivermos dois tipos de papel, liso e estruturado, para fazer cartões e canetas de três cores, quantos cartões diferentes podemos construir?*

Partindo do dinheiro do João

Utiliza a informação seguinte para formular um problema: O João tem algumas moedas no bolso:

- 3 moedas de 2 cêntimos
- 5 moedas de 10 cêntimos
- 6 moedas de 50 cêntimos
- 1 moeda de 1 euro

Uma possibilidade de problema: *o João poderá pagar 1,90 € sem receber troco? E 2,05 €? Se sim, de que maneiras?*

Quais das seguintes quantias poderá o João pagar sem receber troco? 1,90 €? 2,05 €?

Partindo de um horário de comboios

Com base no horário de comboios seguinte, inventa uma situação em que seja necessária a consulta do horário para a sua resolução.

Porto(Campanhã)	P	9.46									16.46	18.45					21.45	
Famalicão		10.18									17.18	19.18					22.18	
Braga	C	10.31									17.31	19.31					22.31	
Braga		6.04									13.04						18.04	20.04
Famalicão		6.19									13.19						18.19	20.19
Porto(Campanhã)		6.45									13.45						18.45	20.45

Uma possibilidade de problema: *o João mora no Porto e vai a Braga, de comboio, visitar os primos. Pensa almoçar lá e voltar no próprio dia. Escolhe os horários de comboios que deve utilizar de modo a ficar o maior tempo possível em Braga.*

Durante a sua prática lectiva, o próprio professor pode recorrer às estratégias *E se em vez de?* e *Aceitando os dados* com vários propósitos. Por exemplo, para promover extensões a um determinado problema, para adaptar problemas a determinados objectivos e contextos ou para simplificar ou enriquecer uma situação. Para avaliar a qualidade dos problemas formulados pelos alunos, pode usar como critérios, por exemplo, os atributos do problema, a estrutura do problema e qual a linguagem convencional usada pelo aluno.



Seleccção e enriquecimento de tarefas

Já que o professor recorre com frequência ao manual escolar durante as aulas, é importante que o use de modo eficaz. A primeira condição é um bom conhecimento do programa e da articulação dos seus vários temas. Com essa base, deve analisar-se de que maneira os temas são abordados no manual e observar atentamente as tarefas propostas, questionando se com elas os alunos irão envolver-se activamente de modo a trabalhar as principais ideias matemáticas. Se não for caso disso, importa proceder a alterações.

No ensino da Matemática *através* da resolução de problemas, os problemas a apresentar não deverão ser usados apenas como contexto para aplicação de conhecimentos, mas também para introduzir ideias fundamentais. Os problemas seleccionados não necessitam de ser originais; muitos dos bons problemas são bastante simples. Por exemplo, se os alunos vão estudar a multiplicação, pode propor-se o seguinte: *Quantas folhas de cartolina vamos precisar de comprar se cada grupo precisa de três e na turma há cinco grupos?* Note-se que, se ainda não aprenderam a multiplicação, esta questão é realmente um problema para eles.

Contudo, o professor não pode limitar-se a este tipo de problemas fechados e muito circunscritos. É necessário dar oportunidade aos alunos de resolverem problemas mais abertos. Tradicionalmente, os manuais propunham essencialmente o que se designou por *problemas de cálculo* e esta tendência ainda se verifica com frequência. O professor poderá, então, adaptar muitos desses problemas de modo a elaborar tarefas com um maior grau de desafio. Está, assim, nas suas mãos a transformação do que pode designar-se por problemas tradicionais noutros mais abertos. De modo a ilustrar esta ideia, apresentam-se, em seguida, possíveis adaptações de problemas.

O aquário da escola

Comprou-se, para a escola, um aquário com a forma de prisma rectangular que tem de dimensões 50 cm de comprimento, 30 cm de largura e 20 cm de altura. Qual é o volume de água necessário para encher o aquário?

Adaptação de O aquário da escola

Os alunos da turma do João vão projectar um aquário com a forma de um prisma rectangular para o átrio da escola. Os peixes que estão a pensar lá colocar necessitam de 300 ℓ de água. Descobre as diferentes dimensões que o aquário pode ter. Escolhe depois a que consideras mais apropriada para o aquário da escola.

Cálculos

Calcula

20×3

$87 + 6$

$43 - 25$

$56 : 18$

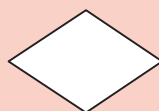
Adaptação de Cálculos

Usando quatro algarismos 4 e uma, ou várias, das quatro operações aritméticas, descobre um modo de obter 8.

Nomeando polígonos

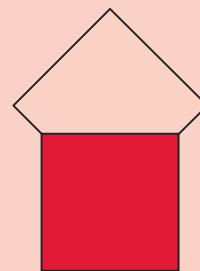
Indica o nome de um polígono com seis lados.

Indica o nome do seguinte polígono:

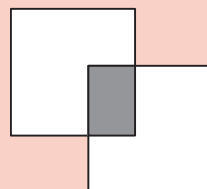


Adaptação de Nomeando polígonos

1. Recorta dois quadrados geometricamente iguais. A figura mostra como podemos sobrepô-los de modo a formarem um polígono de sete lados. Descobre como se podem sobrepor os quadrados de modo a formarem polígonos de 4, 6 e 10 lados.



2. Se os quadrados forem transparentes podemos sobrepô-los como mostra a figura de modo a obter um rectângulo (parte sombreada). Descobre modos de sobrepor os dois quadrados de modo a obter um quadrado, um triângulo ou outras formas.



Os problemas abertos, de que as adaptações apresentadas são exemplos, são especialmente indicados para trabalho de grupo, sendo importante prever, no final, uma síntese feita com toda a turma, onde as ideias, os conceitos e as estratégias utilizadas são exploradas e os alunos têm oportunidade de clarificar os seus raciocínios e de compreender os dos outros.

A concluir

Embora a aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, o trabalho na sala de aula, envolva necessariamente exercícios e actividades de memória e treino, ficaria, no entanto, incompleto, em todos os níveis, sem a resolução de problemas.

A resolução de problemas permite aprender de uma forma activa, ajudar os alunos a construírem conhecimento matemático novo e também testar os seus conhecimentos sobre os diversos temas de ensino. O professor deve seleccionar problemas relacionados com tópicos de Matemática do programa, com o nível dos alunos e com os objectivos pretendidos e estabelecer o tipo de trabalho adequado – individual ou colaborativo – de modo a proporcionar-lhes confiança nas suas possibilidades.

A selecção de problemas, pelo professor, deve subordinar-se às suas potencialidades para promoverem, nos alunos, o raciocínio e o pensamento sobre ideias e conceitos matemáticos. Os alunos devem ser encorajados a apresentar à turma as suas resoluções e a explicar porque acham que fazem sentido. Isto pressupõe que o professor os incentive a dar atenção à última fase do modelo de resolução de problemas proposto por Polya – avaliar os resultados – de modo a analisarem a sua razoabilidade no contexto do problema. Estes aspectos tornam os alunos mais sistemáticos nas suas explorações e facilitam o desenvolvimento de uma maior sensibilidade ao funcionamento e aplicabilidade dos conceitos matemáticos. Ao professor, dão uma visão mais consistente do pensamento dos alunos, permitindo-lhe avaliar o seu nível de conhecimento e de compreensão.

Em 1945, Polya escrevia que se aprende a resolver problemas resolvendo problemas. Os alunos perdem muito do entusiasmo e satisfação que provêm da discussão e justificação de ideias quando a Matemática fica limitada à aplicação do que lhes é apresentado. A actividade de resolução de problemas não deve ser esporádica. O importante é manter um ambiente de questionamento permanente entre o professor e os alunos.

No entanto, uma boa tarefa não basta. A sua exploração é fundamental e, neste processo, o professor é a peça chave. Tem que ter sólidos conhecimentos matemáticos para avaliar as respostas dos alunos e também os conhecimentos didácticos necessários quer para os orientar, quer para os questionar colocando em primeiro plano a reflexão e não o “fornecimento” de respostas.

O professor que proporciona aos alunos tarefas desafiantes e apropriadas ao seu conhecimento, está a proporcionar o estabelecimento de conexões entre vários tópicos dentro e fora da Matemática e a estimular a argumentação e a comunicação recorrendo a diferentes representações. Em suma, está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico, tão essencial a várias facetas da vida.