ELEMENTOS *de* MATEMÁTICA

para professores do Ensino Básico

Coordenação:
PEDRO PALHARES

Lidel - edições técnicas, lda

LISBOA — PORTO — COIMBRA
e-mail: lidel@lidel.pt
http://www.lidel.pt (Lidel on-line)
(*site* seguro - certificado pela Thawte)

Autores e editora agradecem às seguintes entidades o apoio dado à edição desta obra:

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E DO ENSINO SUPERIOR

UNIVERSIDADE DO MINHO
Instituto de Estudos da Criança
Departamento de Ciências Integradas e Língua Materna

EDIÇÃO E DISTRIBUIÇÃO

Lidel - edições técnicas, lda

SEDE: R. D. Estefânia, 183, r/c Dto. 1049-057 Lisboa
Dep. Venda Directa: 21 351 14 48 – venda.directa@lidel.pt
Revenda: 21 351 14 43 – revenda@lidel.pt
Marketing: 21 351 14 44 – marketing@lidel.pt
Mailing/Formação: 21 351 14 45 – mailnet@lidel.pt/formacao@lidel.pt
Ensino Línguas/Exportação: 21 351 14 42 – depinternational@lidel.pt
Linhas de Autores: 21 317 32 55 – edicoesmed@lidel.pt
Periódicos/Tesouraria: 21 351 14 41/47 – periodicos@lidel.pt/tesouraria@lidel.pt
Fax: 21 317 32 59 - 21 352 26 84 - 21 357 78 27

LIVRARIAS/FILIAIS
LISBOA: Av. Praia da Vitória, 14 – 1000-247 – livrarialx@lidel.pt
Tel.: 21 354 14 18 – Fax: 21 317 32 59
PORTO: Rua Damião de Góis, 452 – 4050-224 – delporto@lidel.pt
Tel.: 22 557 35 10 – Fax: 22 550 11 19
COIMBRA: Av. Emídio Navarro, 11-2.° – 3000-150 – delcoimbra@lidel.pt
Tel.: 239 82 24 86 – Fax: 239 82 72 21

Impressão e acabamento: Tipografia Lousanense, Lda. – Lousã
Dep. Legal n.° 215994/04

Capa: José Manuel Reis

ISBN 972-757-280-4

2. Resolução de problemas

SUMÁRIO

Neste capítulo começa-se por abordar a resolução de problemas numa perspectiva curricular e por discutir e analisar os conceitos de exercício, problema e investigação. São desenvolvidas formas de estudar a resolução e a formulação de problemas, assim como as investigações. Dá-se particular ênfase ao ensino de estratégias de resolução de problemas.

2.1. INTRODUÇÃO

A grande finalidade da matemática escolar é desenvolver nos alunos capacidades para usar a matemática eficazmente na sua vida diária: a resolução de problemas oferece uma oportunidade única de mostrar a relevância da matemática no quotidiano dos alunos, apesar de toda a dificuldade que resolver problemas reveste. No entanto, sem a capacidade para resolver problemas, a utilidade e o poder das ideias, conhecimentos e capacidades matemáticas ficam seriamente limitados. Deste modo, a resolução de problemas é um meio para aprender novas ideias e capacidades matemáticas. Para isso, o ensino da matemática deve centrar-se na abordagem de problemas bem seleccionados que conduzam ao envolvimento dos alunos. Os bons problemas podem proporcionar a exploração de conceitos matemáticos importantes e reforçar a necessidade de compreender e usar várias estratégias, propriedades e relações matemáticas. Mas, antes de tudo é necessário resolver muitos problemas, pois, como refere Pólya, aprende-se a resolver problemas resolvendo problemas.

NOTA HISTÓRICA

George Pólya (1887-1985)
Pólya nasceu na Hungria em 1887 e frequentou a Universidade de Budapeste onde obteve o seu doutoramento em Matemática. Ensinou durante vários anos no Instituto de Tecnologia de Zurique, Suíça. No limiar da 2.ª Guerra Mundial, para fugir ao nazismo, mudou-se para os Estados Unidos da América, para a Universidade de Brown, e mais tarde para a Universidade de Stanford, onde ensinou até falecer, em 1985. Foi um homem extraordinário, quer como matemático quer como professor. Entre os numerosos livros que escreveu destaca-se o mais conhecido - *How to Solve It* (1945), que foi traduzido em 17 línguas (em português o seu título é *A Arte de Resolver Problemas*). Este livro, conjuntamente com o *Mathematical Discovery* (1962), alertou a comunidade de educadores matemáticos para a importância da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática continuando tão actuais e importantes como quando foram escritos.

2.2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AS RECOMENDAÇÕES CURRICULARES E PROGRAMÁTICAS

Resolver problemas faz parte da natureza humana, e, ao longo da história, matemáticos, filósofos, psicólogos e educadores têm reconhecido a importância da resolução de problemas e da existência de diferenças individuais na capacidade de chegar a uma solução. Podemos dizer que a "era da resolução de problemas" nasce a partir da recomendação feita pelo NCTM[1] em 1989 de que "o foco" do ensino da matemática escolar deve ser a resolução de problemas. Os problemas fizeram sempre parte da aula de matemática, mas a ênfase e o modo de abordagem no contexto escolar eram diferentes daqueles que o NCTM defende. No início da década de 90 a UNESCO, através da sua *Declaração Mundial sobre Educação para Todos,* também refere claramente que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita e o cálculo. Em 1991, o NCTM vai mais longe quando afirma

> *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*
> (APM/IIE, 1991– Tradução portuguesa de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* NCTM, 1989)
>
> A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de Matemática. A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas (p. 29).

Em Portugal, a APM (1988) também refere, em relação a esta questão, que um grande objectivo para o ensino da matemática é a resolução de problemas, devendo estar no centro do ensino e da aprendizagem matemática em todos os níveis escolares.

Os Programas Nacionais de Matemática, à semelhança de outros organismos (e.g. NCTM, 1989, UNESCO, 1990), também dão ênfase à resolução de problemas em todos os níveis de escolaridade, no âmbito da última reforma curricular.

No 1.º ciclo, o programa (ME, 1990) defende que a organização do programa de matemática, nomeadamente os três blocos que integram os conteúdos e os tipos de actividades a desenvolver nesta área, deve girar em torno da resolução de problemas, em situações de exploração e descoberta, assim como em situações de aplicação. Mais recentemente, no *Currículo Nacional para o Ensino Básico –*

[1] *National Council of Teachers of Mathematics* – Organização de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América.

Competências Essenciais (ME, 2001), para o 1.º ciclo são mantidos os mesmos objectivos e defende-se que

> *Currículo Nacional para o Ensino Básico – Competências Essenciais*
> (ME, 2001)
>
> A resolução de problemas coloca o aluno em atitude activa de aprendizagem, quer dando-lhe a possibilidade de construir noções como resposta às interrogações levantadas (exploração e descoberta de novos conceitos) quer incitando-o a utilizar as aquisições feitas e a testar a sua eficácia (p. 170).

No respeitante ao 2.º ciclo do ensino básico (ME, 1991a), aparece como uma das finalidades do ensino básico desenvolver as capacidades de raciocínio e de resolução de problemas, a par do desenvolvimento de capacidades de comunicação, bem como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade. O Programa de Matemática para o 5.º e 6.º anos de escolaridade do ensino básico (ME, 1991d), no âmbito das capacidades/aptidões dos alunos, segue de perto os objectivos do 1.º ciclo, ou seja, a matemática deve permitir desenvolver a capacidade de resolver problemas. Nesse sentido, devem ser dadas aos alunos oportunidades de "analisar diferentes componentes de uma situação; reconhecer analogias entre situações diferentes; escolher uma estratégia adequada à resolução de uma situação; estimar e criticar um resultado; interpretar e criticar resultados dentro do contexto da situação" (p. 10).

Relativamente ao 3.º ciclo, na Organização Curricular e Programas as finalidades da disciplina de matemática são precisamente as mesmas do 2.º ciclo. No Programa de Matemática para os 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade do ensino básico (ME, 1991c), no âmbito das capacidades/aptidões dos alunos, refere que a matemática deve permitir desenvolver a capacidade de resolver problemas. Nesse sentido, devem ser dadas aos alunos oportunidades de "identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, ...); procurar, seleccionar e interpretar informação relativa ao problema; formular hipóteses e prever resultados; seleccionar estratégias de resolução; e interpretar e criticar resultados dentro do contexto da situação" (p. 10). Além destas são referidas outras capacidades para as quais a resolução de problemas fornece um contexto bastante rico.

De um modo geral, nas orientações metodológicas para o ensino da matemática no ensino básico parte-se do pressuposto de que o aluno é o agente da sua própria aprendizagem; nesse sentido, a metodologia a utilizar deve proporcionar situações, individuais ou em grupo, diversificadas e motivadoras, de modo a desenvolver o espírito de pesquisa, a criatividade, o gosto de aprender, a autonomia e o sentido de cooperação. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que, para desenvolver no percurso escolar dos alunos a competência matemática, deve incluir-se, entre outros aspectos, o seguinte:

> *A Matemática na Educação Básica*
> (Abrantes *et al.*, 1999)
>
> A predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica (p. 4).

Do mesmo modo, podemos referir que as ideias expressas no *Currículo Nacional para o Ensino Básico – Competências Essenciais* (ME, 2001), sobre as grandes finalidades do ensino da matemática para o conjunto dos três ciclos do ensino básico, são: desenvolver a capacidade de raciocínio, a capacidade de comunicação e a capacidade de resolver problemas. Mais concretamente, em relação à resolução de problemas, podemos ler o seguinte:

> *Currículo Nacional para o Ensino Básico – Competências Essenciais*
> (ME, 2001)
>
> A resolução de problemas constitui, em matemática, um contexto universal de aprendizagem. Neste sentido, deve estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação, e integrada naturalmente nos diversos tipos de actividades (p. 68).

Do exposto podemos sintetizar que a importância da resolução de problemas não é só utilitária mas sobretudo formativa, pois, além de nos ajudar a resolver os problemas do quotidiano, permite principalmente desenvolver processos e capacidades de pensamento que são o que de mais importante a matemática escolar pode desenvolver num indivíduo, uma vez que estas actividades complexas de pensamento estão presentes quando alguém é chamado a analisar, interpretar, criticar ou escolher, quer num contexto educativo quer no dia-a-dia. Em educação matemática, a resolução de problemas é uma expressão bastante abrangente que vai desde um objectivo do ensino da matemática até um contexto de aprendizagem, passando por um conteúdo da disciplina de matemática. Qualquer que seja a sua vertente ela "é fundamental, sobretudo a nível do ensino básico, pois é uma actividade de incidência transversal que abrange todas as disciplinas e que tem por finalidade o desenvolvimento de capacidades reconhecidamente necessárias para a formação global dos alunos" (Vale, 1997, p. 3).

Apesar de presentemente haver unanimidade no reconhecimento da importância que a resolução de problemas desempenha num currículo escolar de Matemática, há que ter em atenção o modo de a encarar, podendo afectar o processo de ensino-aprendizagem da matemática, assim como da própria resolução de problemas. Entendemos que a resolução de problemas é encarada segundo três perspectivas – por um lado, como um **processo**, quando pretendemos dotar os alunos com estratégias de resolução tornando-os solucionadores cada vez mais aptos de problemas; é também uma **finalidade**, quando tentamos atender aos aspectos matemáticos como explorar, questionar, investigar, descobrir e usar raciocínios plausíveis; e, por fim, é um **método de ensino**, que surge para introduzir conceitos envolvendo exploração e descoberta, de acordo com as finalidades do ensino da matemática e de factos, conceitos e procedimentos matemáticos.

TAREFA 1

Escolha um nível de ensino e analise o que as *Normas* e o *Currículo Nacional* referem em relação à resolução de problemas de matemática.

2.3. SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As perspectivas sobre como encarar a resolução têm vindo a evoluir sucessivamente de um conteúdo matemático para um modo de encarar o ensino e a aprendizagem da matemática e também a própria matemática. Do mesmo modo, o próprio conceito de problema tem vindo a evoluir para actividades mais abertas, podendo ser encarado não como uma formulação bem definida de uma situação com uma resposta adequada mas também como uma questão mais aberta que pode sugerir várias soluções. Contudo, apesar de todo o trabalho que se tem desenvolvido nos últimos anos, ainda é necessário clarificar alguma terminologia usada na abordagem desta temática.

2.3.1. CLARIFICAÇÃO DE CONCEITOS

Segundo o senso comum, ou seja, num contexto social do quotidiano, a resolução de problemas é um processo através do qual o indivíduo ou o grupo de indivíduos identifica e descobre meios eficazes para resolver conflitos com os quais se confronta no dia-a-dia. É um processo cognitivo de aprendizagem, pois, ao resolver um problema, adquire conhecimento que lhe permite enfrentar outro tipo de situações semelhantes. Este processo envolve o levantamento de questões, a análise de situações, a realização de esquemas, a formulação de conjecturas e a tomada de decisões. A resolução de problemas num contexto da matemática escolar não será muito diferente mas talvez mais específica. É um processo onde se combinam vários elementos, tais como: a organização da informação, o conhecimento de estratégias, as diferentes formas de representação, a tradução de linguagens, a aplicação de vários conhecimentos, a tomada de decisões, a interpretação da solução, etc., e uma gestão e controlo de todos estes elementos. É uma actividade complexa, de um aprendiz motivado, que põe em jogo várias capacidades cognitivas de ordem superior.

Mas o que se entende por capacidades cognitivas de ordem superior? Na Taxonomia de Objectivos Educacionais de Bloom, adaptada para a matemática pelo projecto *National Longitudinal Study of Mathematical Abilities* (NLSMA), debateu-se afincadamente sobre tarefas rotineiras e de ordem superior (ou complexas) em matemática. Toda a aprendizagem envolve pensamento, mas a grande diferença reside no facto de, enquanto que no ensino tradicional a aprendizagem centrava-se na mera indicação de alguns conceitos e na prescrição de alguns procedimentos específicos, presentemente, a ênfase do ensino encontra-se em desenvolver nos alunos capacidades de comunicação e de raciocínio. Estas capacidades são vulgarmente designadas por capacidades de pensamento "de ordem superior". Em termos simples podemos dizer que o pensamento de ordem superior inclui todas as tarefas intelectuais que vão para além da mera recuperação de informação; qualquer transformação da informação é por definição pensamento "de ordem superior". Abrantes, Leal e Ponte (1996) entendem as capacidades de ordem superior como aquelas que "estão ligadas à identificação e resolução de problemas, ao pensamento crítico e ao uso de estratégias de natureza metacognitiva" (p. 2). O pensamento de ordem superior pode tomar também a forma de capacidades metacognitivas, tais como planear e auto-avaliar. Estas tarefas podem ser independentes ou diluídas no conteúdo da tarefa nas quais são aplicadas. Há tarefas que necessitam de pensamento de ordem superior e aqui aparecem a resolução de problemas e as actividades de natureza mais aberta, como as investigações.

Muitos autores têm registado várias definições sobre a resolução de problemas, e podemos concluir que todas são convergentes num ponto: a resolução de problemas envolve o recurso a procedimentos que, apesar de o indivíduo os possuir, terá de escolher os que mais se adaptam à situação em causa. A capacidade para ter sucesso não está directamente ligada ao conhecimento dos conteúdos, mas depende também da experiência e conhecimento das próprias capacidades e limitações de cada um. Este processo envolve conceitos, procedimentos e raciocínios. Pólya (1980) diz que "resolver um problema é encontrar uma saída da dificuldade, é encontrar um caminho à volta de um obstáculo, para obter um fim desejável, que não está disponível de imediato através de meios apropriados" (p. 1). Os *Principles and Standards* do NCTM (2000), que designaremos por *Normas 2000,* referem que "A resolução de problemas é o processo de identificar e utilizar os conhecimentos disponíveis para formular e adaptar estratégias em direcção a uma nova situação" (p. 186).

Definir **problema** é um propósito difícil, já que uma determinada situação pode ser um problema para um dado indivíduo, num dado momento, e para o mesmo indivíduo, num outro momento, ser apenas um exercício ou um facto específico. Podemos assim concluir que existe um conjunto de factores inerentes ao indivíduo e à própria tarefa, além de outros, que vão condicionar quer a sua caracterização quer o seu desempenho. Das várias definições de problema podemos retirar que um **problema** é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a **resolução de problemas** o conjunto de acções tomadas para resolver essa situação.

Atentemos nalgumas das definições de problema no quadro seguinte:

Definição

Um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou uma situação que não sabe resolver, usando o conhecimento imediatamente disponível (Kantowski, 1974).

Ter um problema significa procurar conscienciosamente alguma acção apropriada para atingir um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível (Pólya, 1980).

Um problema ocorre quando se é confrontado com uma situação inicial e se pretende chegar a outra situação final, sem se conhecer um caminho óbvio para a atingir (Mayer, 1985).

Um problema é uma situação na qual um indivíduo ou grupo é chamado a executar uma tarefa para a qual não tem acesso a um algoritmo que determine completamente o método de resolução (...) A situação não pode ser considerada um problema se a realização da tarefa não for desejada pelo indivíduo ou grupo (Lester, 1983).

2.3.2. Exercício — Problema

Distinguir exercício de problema é essencial num processo de ensino. Em relação a esta diferença podemos referir que só se tem um problema se não se sabe como chegar até à solução, pois, se uma questão não tem surpresas e pode ser resolvida confortavelmente utilizando procedimentos rotineiros e familiares, não interessando quão complicados sejam, é um exercício. Assim, um exercício resolve-se habitualmente por processos mecanizados e repetitivos.

▶ *Exemplo:*

Calcule o quociente e o resto da seguinte divisão 2487: 45

Esta questão resolve-se por um processo rotineiro e familiar e, como tal, é um exercício.

Está-se perante um problema quando não se possui um algoritmo que conduza directamente à solução.

▶ *Exemplo:*

No dia de Natal cada um dos seis membros da família da Inês dá uma prenda a todos os outros. Quantas prendas se trocam nesse dia?

Esta questão não pode ser resolvida pela aplicação directa dum algoritmo conhecido. Envolve a mobilização dos conhecimentos já adquiridos e a utilização de estratégias de resolução adequadas à situação, podendo também envolver procedimentos rotineiros e algoritmos.

Por outro lado, a classificação de uma dada situação como problema depende de quem a resolve. Uma mesma questão pode ser um exercício para uns e um problema para outros, e ainda para o mesmo indivíduo uma situação pode ser um problema numa fase de aprendizagem e exercício noutra fase posterior.

▶ *Exemplo:*

Dou ao meu cão três biscoitos por dia. Quantos biscoitos come ele por semana?

Para um aluno que conhece o algoritmo da multiplicação, esta questão é um exercício. Para um aluno do 1.º ano, que não é conhecedor do conceito e do algoritmo da multiplicação, esta questão é seguramente um problema.

Há assim uma grande subjectividade na classificação de uma dada questão como problema. Como refere Kantowski (1974), o problema de um pode ser o exercício de outro e a frustração de um terceiro. Pode ainda verificar-se que a pessoa não tem conhecimentos e capacidades para abordar a questão e, como tal, não sente motivações para a enfrentar. Como refere Lester (1994), a situação não pode ser considerada um problema se a sua realização não for desejada pelo indivíduo. E assim temos, além dos aspectos cognitivos, os aspectos afectivos a interferir na realização das tarefas matemáticas.

2.3.3. Problema — Investigação

Ultimamente surgiram outros termos que, sendo para muitos autores sinónimos de problemas, para outros não o são. A palavra "problema" é muitas vezes utilizada para significar uma tarefa, com um enunciado bem definido e estruturado (problema de texto pronto, segundo a designação de Mendonça, 1999), mas também com o significado de projecto, actividade ou investigação, problema de natureza mais aberta que permita ao aluno vários processos de resolução onde tenha de "investigar" para chegar a um resultado. Do mesmo modo, a resolução de problemas é identificada muitas vezes como sinónimo de trabalho de investigação.

A resolução de problemas e as investigações são duas actividades que envolvem processos complexos de pensamento que permitem desafiar os alunos, tendo algumas diferenças que podemos sintetizar nos três pontos seguintes, considerando a opinião de alguns investigadores. O aspecto que mais os distingue será o carácter aberto das investigações, assim como o tipo de estratégias que estas actividades utilizam que são difíceis de sistematizar, o que não acontece na resolução de problemas. Por outro lado, na resolução de problemas, o problema está formulado e as questões são normalmente dadas pelo professor, enquanto que nas investigações as questões são mais abertas, estão menos elaboradas e o aluno pode participar na sua formulação. Por fim, a resolução de um problema pressupõe sempre uma solução, enquanto que a investigação poderá ter ou não, uma vez que a ênfase reside na exploração da questão por todos os caminhos possíveis, pois, de acordo com Pirie (1987, p. 2), "o objectivo é a viagem e não o destino".

▶ *Exemplo 1:*

O João, a Inês e a Rita encomendaram uma piza grande para o jantar. O João comeu o triplo do que comeu a Rita. A Rita comeu o dobro do que comeu a Inês. Se a piza foi cortada em 36 fatias, quantas fatias comeu cada um dos três amigos?

▶ *Exemplo 2:*

Encontra relações interessantes no triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

O primeiro exemplo ilustra uma tarefa bastante estruturada com as questões bem definidas, onde é preciso descobrir o caminho para atingir a resposta. No segundo exemplo, a tarefa é mais aberta, pois não está formulada nenhuma questão. É necessário procurar todas as possibilidades. Esta segunda situação é um problema aberto designado por vários autores por investigação, de acordo com as considerações mencionadas atrás.

De qualquer modo, sejam problemas ou investigações, a componente mais rica destas actividades será sem dúvida a discussão final, quando os alunos têm de expor as suas ideias e utilizar argumentos que as sustenham. Mais do que distinguir problema de investigação, o importante é apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e onde os alunos tenham oportunidade de experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões.

Ao longo deste texto explorámos a designação de problema no seu sentido mais amplo; muitas das vezes esses problemas, quando mais abertos, podem ter a designação de investigações.

TAREFA 2

Apresente três situações que evidenciem a diferença entre exercício, problema e investigação.

2.3.4. DIFICULDADES COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A aprendizagem em resolução de problemas é, pela sua natureza, uma actividade intelectual extremamente complexa, pois implica mais do que lembrar factos ou a aplicação de procedimentos bem aprendidos. Implica a coordenação de conhecimentos, experiências prévias, intuição, atitudes e concepções. São importantes a memória, conhecimentos, factos específicos, o uso de uma grande variedade de capacidades e procedimentos e muitas outras capacidades no âmbito do domínio cognitivo e meta-cognitivo e domínio afectivo.

Schoenfeld (1992) refere que algumas das concepções que os alunos manifestam podem dificultar o sucesso em resolução de problemas. Por exemplo, uma das concepções muito comuns entre os alunos é a de que os problemas têm sempre uma solução e que esta é única. Ou que os problemas têm de ser rapidamente resolvidos em poucos minutos. Estas concepções têm efeitos prejudiciais no desempenho dos alunos, pois pode levá-los a desistirem caso não consigam resolver um problema ao fim de alguns minutos ou caso descubram que o problema não tem solução.

Outra das principais dificuldades em resolução de problemas reside na compreensão. Partindo do pressuposto de que para compreender é essencial relacionar, esta deve ser uma fase de extrema importância no ensino da resolução de problemas.

Lester e Schroeder (1989) referem que a compreensão ajuda a resolução de problemas de cinco modos distintos:

1) desenvolve o tipo de representação que o aluno pode construir;
2) ajuda o aluno a coordenar a selecção e execução de procedimentos (estratégias, algoritmos, ...);
3) ajuda o aluno a julgar a razoabilidade dos resultados;
4) promove a transferência do conhecimento para problemas que com este estejam relacionados;
5) promove a generalização para outras situações.

Já Mason, Burton e Stacey (1985) identificam três factores principais que afectam o pensamento matemático:

1) a capacidade de usar processos subjacentes ao pensamento matemático;
2) a confiança para lidar com estados emocionais e psicológicos, para deles tirar o melhor proveito;
3) a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Como processos subjacentes ao pensamento matemático, consideram o particularizar, conjecturar, generalizar e argumentar. A incapacidade para generalizar traduz uma certa incapacidade de pensar matematicamente, uma vez que a generalização é a essência do pensamento matemático. Segundo estes autores, a capacidade de pensar matematicamente pode ser desenvolvida através de uma prática reflexiva. Contudo, esta prática requer bastante tempo: tempo para pensar, para resolver, para propor alternativas, para conjecturar, para formular e para discutir.

2.4. FORMAS DE ABORDAR A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A falta de sucesso na resolução de problemas decorre, a maior parte das vezes, não da falta de conhecimentos matemáticos mas sim da ineficácia do uso desses conhecimentos. Por vezes, quem está a resolver o problema não sabe mobilizar o conhecimento que possui para aplicá-lo à nova situação. Nesse sentido, o conhecimento de modelos de resolução e de estratégias de resolução poderá constituir uma ajuda válida na organização do pensamento individual e, consequentemente, na procura de caminhos possíveis de resolução e exploração das situações. Por outro lado, só se aprende a resolver problemas resolvendo problemas. Assim, começaremos por ver o que a literatura nos diz sobre os problemas.

2.4.1. TIPOLOGIA DE PROBLEMAS

As tarefas num processo de ensino e aprendizagem são determinantes para caracterizar o trabalho que se desenvolve na sala de aula. Estas podem ser diversificadas, desde perguntas, problemas, construções, aplicações, investigações, exercícios. As recomendações internacionais vão no sentido de se valorizarem as que envolvem processos matemáticos complexos e que requerem criatividade por parte do aluno. Nesse sentido vão todas as tarefas não rotineiras.

Deve-se dar bastante atenção à selecção de problemas de cunho exploratório e de investigação a propor nas aulas, que devem ser um desafio para todos os alunos, de modo a colocar hipóteses e a testar conjecturas, e que no fim sejam discutidos por todos na aula. Uma vez que os problemas ajudam o aluno na aquisição de novos conhecimentos matemáticos e são essenciais num ensino da matemática, é necessário identificar algumas características que um problema deve ter para ser considerado um bom problema de matemática.

Um bom problema, segundo as *Normas 2000,* deve geralmente possuir três características:

1) **ser problemático**, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível;
2) **ser desafiante** e **ser interessante** a partir de uma perspectiva matemática;
3) **ser adequado**, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar as tarefas.

Um ensino de resolução de problemas exige, obrigatoriamente, o recurso a problemas, devendo existir uma grande variedade de problemas disponíveis que podem ser utilizados no ensino da matemática. Vários investigadores têm-se debruçado a fazer uma categorização de problemas que pode ser útil para quem aprende a resolver problemas e para quem ensina segundo uma perspectiva de resolução de problemas. Vejamos duas dessas tipologias.

Charles e Lester (1986) propõem uma tipologia de problemas adequada para o 1.º ciclo do ensino básico e que apresenta cinco tipos de problemas:

2.4.1.1. Tipologia de problemas (Charles e Lester, 1986)

Problemas de um passo

São os que podem ser resolvidos através da aplicação directa de uma das quatro operações básicas da aritmética.

▶ *Exemplo:*

O sr. João tem um quiosque, onde vende postais. No último ano vendeu 23 caixas de postais, realizando 138 euros. Quanto é que o sr. João realizou em cada caixa de postais que vendeu?

Problemas de dois ou mais passos

São os que podem ser resolvidos através da aplicação directa de duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética, respectivamente.

▶ *Exemplo:*

O Luís tinha 600 berlindes. Na escola, resolveu dar metade à sua colega de carteira. Mais tarde deu 1/4 do resto ao irmão. Com quantos berlindes ficou o Luís?

Problemas de processo

São os que só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução. São os que não utilizam processos mecanizados ou estandardizados.

▶ *Exemplo:*

Quando a Ana resolveu aprender canto, já sabia quatro canções. Ao fim da primeira semana de aulas de canto, já sabia cinco canções. No final da segunda, sabia sete e no final da terceira semana sabia dez. Se continuar a aprender a este ritmo, quantas canções saberá a Ana ao fim de quinze semanas?

Problemas de aplicação

São os que normalmente requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões. Muitas vezes utilizam uma ou mais operações e uma ou mais estratégias de resolução.

▶ *Exemplo:*

No fim do ano uma turma pretende realizar um jantar de confraternização. Apresente duas propostas de ementa, sabendo que são quinze alunos e a verba disponível são 125 euros.

Problemas tipo puzzle

São problemas que necessitam como que de um "flash" para chegar à solução. Estes problemas podem suscitar o interesse do aluno e habituá-lo a "olhar" para os problemas sob diversos pontos de vista.

▶ *Exemplo:*

Desenhe quatro linhas, sem levantar o lápis do papel, de modo que passem pelos nove pontos.

A classificação adoptada tem frequentemente a ver com o público a que se destina e também com as concepções pessoais do professor em relação à natureza dum problema de matemática e à resolução de problemas. Nesse sentido, o modelo de Charles e Lester (1986) tem-se mostrado suficiente para a categorização dos problemas a utilizar com alunos do primeiro ciclo. O projecto GIRP[2] (Vale, 2002) apresenta outra tipologia de problemas onde não se pressupõe a inclusão de cada problema num e num só dos tipos e não são considerados os problemas tipo puzzle.

2.4.1.2. Tipologia de problemas (GIRP)

Problemas de processo

Um problema deste tipo não se resolve, geralmente, pela aplicação directa de um algoritmo, isto é, dificilmente se resolverá sem a utilização de estratégias de resolução de problemas, tais como: descobrir um padrão, trabalhar do fim para o princípio, fazer um esquema ou um desenho, fazer uma lista organizada, reduzir a um problema mais simples, formular e testar uma conjectura. Estes problemas podem não estar relacionados com os conteúdos programáticos e, se estiverem, pode não ser necessária para a resolução a sua utilização directa, para além de conhecimentos elementares de aritmética e geometria.

▶ *Exemplo:*

Quantos quadrados podemos contar num tabuleiro de xadrez?

Problemas de conteúdo

Um problema deste tipo requer a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas. Sem eles dificilmente poderá ser resolvido.

[2] Grupo de Investigação em Resolução de Problemas, constituído por: Domingos Fernandes; António Borralho; Ana Leitão; Helena Fernandes; Isabel Cabrita; Isabel Vale; Lina Fonseca; e Pedro Palhares.

▶ *Exemplo:*

Determine as amplitudes dos ângulos de um triângulo sabendo que o triângulo é isósceles e que um dos ângulos tem 75° de amplitude.

Problemas de aplicação

Um problema deste tipo utiliza dados da vida real, apresentados ao solucionador ou por ele recolhidos. A tomada de decisões assume uma relevância importante e surge como consequência da análise dos dados. A resolução destes problemas passa muitas vezes pela utilização de uma ou mais estratégias de resolução de problemas. Estes problemas podem admitir mais do que uma solução e, contrariamente aos outros problemas, podem demorar várias horas ou dias a serem resolvidos.

▶ *Exemplo:*

Uma turma quer deslocar-se a Espanha em passeio. Sabendo que pretendem seguir o trajecto Porto – Vigo – Madrid – Salamanca – Porto, que vão utilizar parques de campismo e gastar, no máximo, dez dias, faça um levantamento do custo do passeio por aluno, tendo em conta as seguintes despesas: bilhete de autocarro; alimentação; taxas dos parques de campismo; extras.

Problemas de aparato experimental

Um problema deste tipo requer a utilização de um aparato experimental, sobre o qual o solucionador deve exercer as suas acções. É um tipo de problema que dificilmente se resolve sem a utilização do aparato e que suscita a utilização de métodos de investigação próprios das ciências experimentais. São problemas que permitem desenvolver certas capacidades, tais como: planificar, organizar dados, interpretar dados, pesar, medir e contar. Estes problemas permitem que o solucionador manifeste determinadas competências que com outro tipo de problema nem sempre são identificáveis, podendo também suscitar a resolução de vários subproblemas.

▶ *Exemplo:*

I. Construa um pêndulo com um pedaço de fio de 60 cm e um objecto de 30 g.
   1. Quanto tempo demora o pêndulo a oscilar 10 vezes?
   2. Qual a amplitude, aproximada, da oscilação?
   3. Substitua o objecto por um outro com 15 g e responda às questões anteriores.
   4. Faça várias experiências.

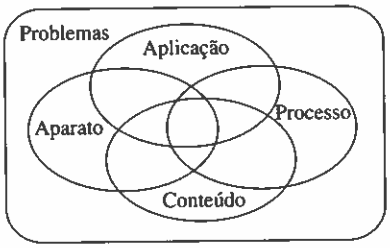
II. Corte 10 cm ao fio do pêndulo. Responda novamente às questões de I.

III. Corte sucessivamente o fio do pêndulo até ao mínimo de 30 cm. Responda novamente às questões de I.

Descubra relações entre:

- o tempo gasto nas oscilações e o comprimento do fio do pêndulo;
- a amplitude das oscilações e o comprimento do fio do pêndulo.

Nesta tipologia um mesmo problema pode inserir-se em mais do que um dos tipos apresentados. O esquema anexo ilustra o modo como os quatro diferentes tipos de problemas se podem relacionar.



Os problemas a que iremos dar atenção especial são os problemas de processo.

2.4.2. MODELOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não existe um único método para resolver problemas nem para ensinar a resolver problemas. Foi Pólya (1973) no seu famoso livro *How to Solve It* que primeiramente descreveu um método para resolver problemas baseado em heurísticas gerais, no qual um problema era decomposto em quatro fases. O modelo prescritivo de Pólya continua a ser uma referência essencial para todos os investigadores na área da resolução de problemas tendo alguns desenvolvido modelos que têm por base o apresentado por Pólya. Para este investigador, ensinar a resolver problemas envolve experiências consideráveis e um estudo aprofundado sobre o processo de chegar à solução. O professor, que quer melhorar a capacidade de resolver problemas do aluno, deve orientar a sua atenção para certas perguntas-chave ou sugestões que correspondem às operações mentais usadas na resolução. Pólya sugere uma lista de questões e sugestões que estão agrupadas em quatro fases que constituem o processo de resolução de problemas.

2.4.2.1. Modelo de Pólya (adaptado de Pólya, 1973)

Compreender o problema

É necessário **compreender** o problema para tentar dar uma resposta. Deve identificar-se o que é conhecido (os dados), o que é desconhecido (o objectivo) e que condições são apresentadas;

Delinear um plano

É necessário delinear um **plano** para chegar à solução. Deve começar-se por pensar nas suas experiências anteriores e procurar algo que se relacione com o problema em causa e que tenha já sido resolvido, ou pode tentar-se várias abordagens antes de decidir qual a que parece mais promissora. Para esta fase sugerem-se algumas heurísticas: usar problemas auxiliares, decompor e recombinar o problema, tentar evocar e resolver problemas relacionados (que podem ser uma simples versão ou uma generalização do problema existente), desenhar uma figura, fazer uma conjectura e testá-la e trabalhar de trás para a frente;

Executar o plano

Nesta fase executa-se o plano que se elaborou até chegar à solução. Se se chegar a um impasse, volta-se à fase de planificação, ou seja, à segunda fase;

Verificar

Nesta fase verifica-se a solução obtida de acordo com os dados e as condições apresentadas no problema.

É de salientar que este modelo, em vez de ser uma descrição de como os alunos com sucesso pensam, é uma proposta para ensinar a resolver problemas; além de ser valioso como guia na organização do ensino, é também bastante útil na identificação de áreas de dificuldade manifestadas pelos alunos ou na clarificação do processo mental envolvido em actividades de resolução de problemas que tenham sido bem sucedidas. Pólya referiu que, seguindo consistentemente e sequencialmente estas fases, a maior parte dos alunos podem ser ensinados a ter sucesso em resolução de problemas.

Fernandes, Vale, Fonseca e Pimentel (1995) propõem uma adaptação do modelo de Pólya para ensinar a resolver problemas a alunos do ensino básico, no qual a segunda e terceira fases do modelo de Pólya aparecem juntas, uma vez que na prática é difícil distingui-las. Também referem que é importante aprender a utilizar técnicas e estratégias de resolução que poderão ajudar os alunos a resolver mais facilmente uma grande diversidade de problemas, sobretudo se estiverem a trabalhar sozinhos.

2.4.2.2. Modelo de resolução de problemas (adaptado de Fernandes, Vale, Silva, Fonseca e Pimentel, 1998)

Ler e compreender o problema

Deve ser lida toda a informação. Devem ser identificados os dados e as condições da situação apresentada. Devem ser analisadas e discutidas todas as palavras, expressões e condições. Identificar os dados principais. O solucionador (ou o professor) deve colocar questões sobre o problema de modo a entender o que se pretende.

Fazer e executar um plano

Devem ser escolhidas as estratégias que nos podem ajudar a resolver o problema e como utilizá-las. Recordar um problema semelhante ou identificar subproblemas pode ajudar. Organizar a informação numa tabela pode contribuir para uma melhor identificação de uma estratégia. Implementar a(s) estratégia(s) escolhidas.

Verificar a resposta

Verificar se as soluções encontradas estão de acordo com a interpretação do problema. Caso não estejam, verificar os cálculos ou mudar de estratégia. Procurar resoluções alternativas.

Vejamos um exemplo onde se utiliza este modelo de resolução.

▶ *Exemplo:*

Numa fábrica de refrigerantes há caixas de quatro latas e caixas de seis latas. Um cliente encomendou 114 latas em 24 caixas de ambos os tipos. Quantas caixas de seis latas fazem parte da encomenda?

Resolução

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:
Que tipo de caixas há na fábrica?
Qual foi a encomenda do cliente?

Há caixas de 4 latas e caixas de 6 latas.
O cliente quer 24 caixas de ambos os tipos com 114 latas.

O que é que se quer saber?

Quantas caixas de 6 latas há numa encomenda de 114 latas embaladas em caixas de 4 e de 6 latas.

Fazer e executar um plano

Que estratégias nos podem ajudar a resolver o problema? Como utilizá-las?
Podemos utilizar a estratégia Fazer Tentativas e ao mesmo tempo Fazer uma Lista Organizada que nos ajude a encontrar a solução. Por uma questão de organização podemos listar as tentativas numa Tabela.
Se tivermos 12 caixas de 6 latas e 12 caixas de 4 latas teremos $12 \times 6 + 12 \times 4 = 120$.
Esta tentativa não serve porque obtivemos 120 latas e a encomenda é de apenas 114.
Experimentemos outros valores:

N.º de caixas de 6 latas	N.º de caixas de 4 latas	Total de latas nos dois tipos de caixas
12	12	$12 \times 6 + 12 \times 4 = 120$
11	13	$11 \times 6 + 13 \times 4 = 118$
10	14	$10 \times 6 + 14 \times 4 = 116$
9	15	$9 \times 6 + 15 \times 4 = 114$

Na encomenda há 9 caixas de 6 latas.

Verificar a resposta

Verificar os cálculos.
Verificar se a resposta obtida está de acordo com o que é pedido no problema.

Qualquer um destes modelos envolve o recurso a um conjunto de estratégias para delinear e executar o plano de resolução.

2.4.3. ESTRATÉGIAS

Em todos os modelos o busílis está na segunda fase, uma vez que não há apenas um modo "certo" de resolver um problema, podendo ser utilizadas muitas estratégias que desempenham um papel importante para o seu sucesso. Entende-se por estratégias de resolução de problemas um conjunto de técnicas a serem dominadas pelo solucionador e que o ajudam a "atacar" o problema ou a progredir no sentido de obter a sua solução (Vale, 1994). Para explorar esta fase houve necessidade de tornar as heurísticas de Pólya mais explícitas e mais apropriadas para o solucionador.

As estratégias de resolução de problemas fazem parte do *kit* de ferramentas matemáticas que os alunos possuem e que os podem ajudar a explorar um problema (NCTM, 1989). E se nenhuma serve? Neste sentido, Pólya (1973) não nos ajuda muito, dizendo apenas que a primeira regra para a descoberta é ter "miolos" e sorte e a segunda é continuar envolvido até ter uma ideia brilhante.

2.4.3.1. Estratégias de resolução de problemas

Descobrir um padrão/Descobrir uma regra ou lei de formação

Esta estratégia centra-se em certos passos do problema e a solução é encontrada por generalizações de soluções específicas.

Um matemático, tal como um pintor ou um poeta, é um mestre de padrões; as ideias, como as cores ou as palavras, devem estar em perfeita harmonia – Thomas Hardy

Fazer tentativas/Fazer conjecturas

Nesta estratégia tem de se "adivinhar" a solução, segundo os dados do problema, e confirmar ou não as condições do problema.

Certamente que temos de aprender a provar, mas também temos de aprender a adivinhar – George Pólya

Trabalhar do fim para o princípio

Nesta estratégia começa-se pelo fim ou pelo que se quer provar.

Usar dedução lógica/Fazer eliminação

Nesta estratégia encaram-se todas as hipóteses e vai-se eliminando, uma a uma, aquelas que não são possíveis.

Reduzir a um problema mais simples/Decomposição/Simplificação

Esta estratégia implica resolver um caso particular de um problema. Normalmente, aparece associada à estratégia de descoberta de um padrão.

Divide um problema a estudar em tantas partes quantas possas e necessites para o resolveres mais facilmente – René Descartes

Fazer uma simulação/Fazer uma experimentação/Fazer uma dramatização

Esta estratégia consiste em utilizar objectos, criar um modelo ou fazer uma dramatização que traduza o problema a ser resolvido.

Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema

Um desenho vale mais do que mil palavras.

Fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela

Utiliza-se como estratégia de resolução ou simplesmente para representar, organizar e guardar informação.

Algumas das estratégias de resolução de problemas apresentadas atrás, devido às suas grandes potencialidades, têm sido estudadas mais como tópicos específicos do que como estratégias de resolução de problemas. Por exemplo, "descobrir um padrão" tem sido mais estudada no contexto do "pensamento algébrico" do que na resolução de problemas como estratégia, assim como "fazer uma lista organizada" tem sido mais estudada na área da combinatória ligada ao uso de diagramas de árvore.

TAREFA 3

Comente a afirmação: "As estratégias tornam os problemas mecanizados".

2.4.4. Resolução de alguns problemas

Acreditamos que se pode aprender a resolver problemas, sobretudo, se se for disciplinado na forma de pensar e de estruturar os pensamentos e, consequentemente, se se for capaz de os traduzir para o papel. Neste sentido, a familiaridade com o uso de estratégias dentro de um modelo de resolução vai permitir ao aluno passar gradualmente da resolução de uma situação problemática mais fechada e estruturada para uma situação mais aberta sem o perigo de se sentir perdido.

Assim, podemos resumir as ideias principais para resolver um problema num modelo que está traduzido no esquema anexo (pág. seguinte).

Os alunos devem ser submetidos a um ensino que lhes dê a oportunidade de praticar um número significativo de estratégias através da resolução de vários problemas.

De seguida apresentamos alguns problemas resolvidos utilizando as estratégias sugeridas.

2.4.4.1. Estratégia: fazer tentativas

Muitas vezes, esta é a única abordagem possível. Claro que normalmente a tentativa não é feita às cegas mas é orientada em termos de raciocínio e verificada. Se satisfaz as condições constitui solução, caso contrário devemos fazer outra tentativa e voltar a testar.

Processos de resolução de problemas

LER E COMPREENDER O PROBLEMA

FAZER E EXECUTAR UM PLANO

VERIFICAR A RESPOSTA

Capacidades de resolução de problemas

- Ler toda a informação.
- Identificar os dados e as condições da situação apresentada.
- Analisar todas as palavras, expressões e condições.
- Identificar os dados principais.
- Colocar questões sobre o problema, de modo a entender o que se pretende.

- Escolher as estratégias que podem ajudar a resolver o problema e como utilizá-las.
- Recordar um problema semelhante ou identificar subproblemas pode ajudar.
- Organizar a informação numa tabela pode ajudar a identificar melhor uma estratégia.
- Implementar a(s) estratégia(s) escolhidas.

- Verificar se as soluções encontradas estão de acordo com a interpretação do problema.
- Caso não sejam, verificar os cálculos ou mudar de estratégia.
- Procurar resoluções alternativas.

Estratégias de resolução de problemas

Descobrir um padrão/Descobrir uma regra ou lei de formação

Fazer tentativas/ Formular uma conjectura

Trabalhar do fim para o princípio

Usar dedução lógica/ Fazer eliminação

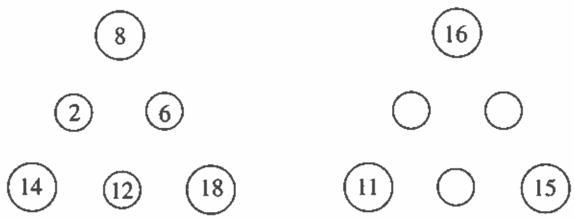
Reduzir a um problema mais simples/Decomposição/ Simplificação

Fazer uma simulação/ Fazer uma experimentação Fazer uma dramatização

Fazer um desenho, diagrama gráfico ou esquema

Fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela

▶ *Exemplo:*

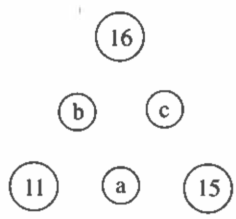


No primeiro diagrama os números dos círculos grandes obtêm-se adicionando os números dos dois círculos pequenos adjacentes. Complete o segundo diagrama com o mesmo padrão.

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:

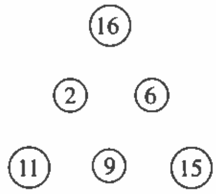
- Quais são os números que dão origem ao 14?
  2 + 12.
- E ao 18?
  12 + 6.
- E ao 8?
  2 + 6.
- O que se pretende?



Obter no outro diagrama números a, b e c, tais que:

a + b = 11; a + c = 15; b + c = 16.

Fazer e executar um plano



Para resolver este problema podemos proceder por tentativas (de notar que, se os alunos tivessem conhecimentos de álgebra, poderia resolver-se um sistema de três equações a três incógnitas).

Suponhamos que a = 9.

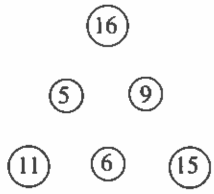
Então, tem de ser b = 2 e c = 6.

Mas, 2 + 6 ≠ 16, logo, a tentativa falhou.

Como 2 + 6 é muito menor que 16, vamos tentar um valor de *a* menor. Experimentemos a = 6.

Então, tem de ser b = 5 e c = 9.

Mas, 5 + 9 ≠ 16, logo, voltou a falhar.



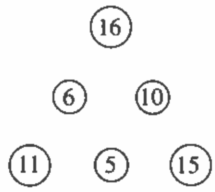
Temos ainda de diminuir *a*.

Seja a = 5.

Então, tem de ser b = 6 e c = 10.

Mas, 6 + 10 = 16,

logo, encontrámos a solução!



Verificar a resposta

A estratégia foi bem utilizada e conduziu a uma solução. Os cálculos estão correctos.

Mas, reparando melhor, podemos verificar que há na solução encontrada uma relação interessante entre os números.

Se adicionarmos os números dos círculos maiores, e compararmos essa soma com a dos menores,

11 + 15 + 16 = 42

5 + 6 + 10 = 21

e no exemplo apresentado fizermos o mesmo,

14 + 18 + 8 = 40

12 + 2 + 6 = 20

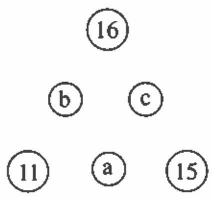
em ambos os casos se verifica que a soma dos círculos pequenos é metade da dos círculos grandes.

Isto sugere-nos uma outra estratégia de abordagem:

Como a + b + c = 21

e b + c = 16,

temos necessariamente que a = 5!



Descoberto a, é fácil deduzir os valores de b e c.

Note-se que, neste caso, na fase da verificação, encontrámos uma resolução alternativa e até mais elegante.

TAREFA 4

Na loja do Tomás há bicicletas e triciclos para venda. No dia 1 de Outubro tinha ao todo na loja 60 rodas e 27 assentos. Quantas bicicletas e quantos triciclos tinha nesse dia o Tomás?

2.4.4.2. Estratégia: fazer uma lista organizada

A listagem organizada permite-nos esgotar todos os casos possíveis e não esquecer nenhum.

▶ *Exemplo:*

Na aula de desenho, o professor pediu aos alunos que criassem um novo animal, juntando dois animais já existentes. Podiam escolher entre a girafa, o elefante, o camelo, o macaco, a avestruz e o leão. Sabendo que cada aluno criou um animal diferente, qual o número máximo de alunos que o professor pode ter?

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:

- Quantos animais estão à disposição? Seis.
- Como é que podem criar-se animais diferentes?

Combinando dois existentes, por exemplo, a girafa e o elefante.

- Será que interessa a ordem? Convencionamos que não.

Fazer e executar um plano

Vamos fazer uma lista organizada de todas as possibilidades. Um dos caminhos será partir do primeiro animal e combiná-lo com todos os outros. A seguir, partir do segundo e fazer as combinações com todos os que faltam. E assim sucessivamente, até esgotar todas as possibilidades.

Girafaelefante	Elefantecamelo	Camelomacaco	macacoavestruz	Avestruzleão
Girafacamelo	Elefantemacaco	Cameloavestruz	macacoleão	
Girafamacaco	Elefanteavestruz	Cameloleão		
Girafaavestruz	Elefanteleão			
Girafaleão				

Contando os casos possíveis, verificamos que o professor pode ter no máximo 15 alunos.

Verificar a resposta

Podemos agora verificar se as combinações foram bem feitas, por uma ordem determinada, de modo a não esquecer nenhum caso.

TAREFA 5

Uma escola recebeu cinco computadores para serem distribuídos por três salas: a sala Azul, a sala Verde e a sala Rosa. Em cada sala deve ficar pelo menos um computador. De quantas maneiras pode ser feita a distribuição?

2.4.4.3. Estratégia: fazer um desenho ou um diagrama

Esta estratégia é útil em combinação com outras, mas por vezes é também usada como estratégia principal, sem a qual seria muito mais difícil ou mesmo impossível resolver o problema.

▶ *Exemplo:*

Num encontro de 110 alunos universitários, a organização investigou os seus estudos secundários e obteve a seguinte informação:

25 estudaram Física
45 estudaram Desenho
48 estudaram Matemática
10 estudaram Física e Matemática
8 estudaram Desenho e Matemática
6 estudaram Física e Desenho
5 estudaram as três disciplinas

Quantos estudantes tiveram Desenho mas não tiveram Física nem Matemática?
Quantos estudantes tiveram Desenho, Física ou Matemática?
Quantos estudantes não tiveram nenhuma das três disciplinas?

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:

• Há 45 alunos que estudaram Desenho. Esses alunos estudaram apenas Desenho? Não necessariamente. Estes alunos podem ter também estudado Matemática e/ou Física.

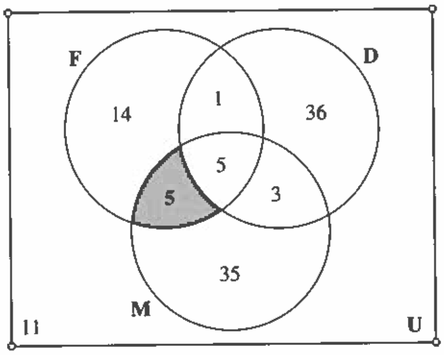
• Pode haver pessoas que não tenham estudado nenhuma destas matérias? Sim; é possível frequentar o ensino secundário com outras disciplinas.

Fazer e executar um plano

Vamos construir um diagrama usando conjuntos, designadamente o conjunto F dos alunos de Física, o conjunto D dos alunos de Desenho e o conjunto M dos alunos de Matemática.

Como pode haver alunos que não pertençam a qualquer destes conjuntos, estes têm de estar integrados num universo mais vasto que designamos por U.

Uma vez que pode haver alunos pertencentes a dois ou mesmo a três conjuntos, o diagrama tem de prever essa possibilidade, apresentando espaço para a intersecção.



Como há um total de 10 estudantes com Física e Matemática e de 5 com as três disciplinas, haverá 5 com Física e Matemática mas não Desenho (região sombreada). Analogamente, como há 8 alunos com Desenho e Matemática e 5 com as três disciplinas, há 3 com apenas Desenho e Matemática. Da mesma forma se conclui que há 1 aluno com Física e Desenho mas não Matemática. Para descobrir o número de alunos com apenas Desenho, subtraímos de 45 (que são os de Desenho) os que têm Desenho e outra ou outras disciplinas, isto é, $1 + 3 + 5 = 9$, e obtemos 36. Procedemos de igual modo para o preenchimento das outras regiões. Assim, o número de estudantes com Matemática, Física ou Desenho é de $35 + 14 + 36 + 3 + 5 + 5 + 1 = 99$. Logo, o número de estudantes que não tiveram nenhuma das três disciplinas é de $110 - 99 = 11$.

Depois do diagrama preenchido, podemos responder às questões formuladas.

Há 36 alunos que tiveram Desenho mas não tiveram Física nem Matemática.

Há 99 estudantes com Física, Desenho ou Matemática.

Há 11 estudantes que não tiveram nenhuma das três disciplinas.

Verificar a resposta

Voltemos a fazer os raciocínios e os cálculos para confirmação dos resultados.

TAREFA 6

Todos os dias à tarde, um navio deixa o Havre com destino a Nova Iorque e outro deixa Nova Iorque com destino ao Havre. A viagem demora 7 dias e 7 noites.

Quantos navios Nova Iorque/Havre encontrará o navio que sai do Havre durante a sua viagem até Nova Iorque?

(Não considerar a diferença horária entre as duas cidades) *Problema do séc. XVIII*

2.4.4.4. Estratégia: fazer uma simulação

Uma simulação das condições do problema, quer com objectos quer com um desenho apropriado, ou mesmo recorrendo a uma dramatização, pode ser muitas vezes a melhor abordagem.

▶ *Exemplo:*

Um barqueiro tem um lobo, um cabrito e uma couve para atravessar o rio. Como o barco é pequeno, só pode levar um de cada vez. Por outro lado, sabemos que o lobo ameaça o cabrito e que o cabrito ameaça a couve.

Quantas travessias deve o barqueiro fazer para que não fique em perigo nenhum dos seus "passageiros"?

Problema do séc. VIII

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:

• Quantos passageiros podem estar no barco em cada travessia?
Um passageiro.

• Que passageiros é que podem estar na margem sozinhos?
Se estiverem dois, apenas podem ser o lobo e a couve.

Fazer e executar um plano

Para resolver este problema podemos simular as travessias dos passageiros com objectos (ou com uma dramatização) ou fazer um diagrama.

∪ – Lobo
Δ – Cabrito
⊕ – Couve

∪ ⊕		1.ª travessia Δ	→	Δ
∪ ⊕	←	2.ª travessia		Δ
⊕		3.ª travessia ∪	→	∪ Δ
⊕ Δ	←	4.ª travessia Δ		∪
Δ		5.ª travessia ⊕	→	∪ ⊕
Δ	←	6.ª travessia		∪ ⊕
		7.ª travessia Δ	→	∪ Δ ⊕

Assim, verifica-se que são necessárias sete travessias.

Verificar a resposta

As estratégias foram bem utilizadas?
Respeitaram-se as condições do problema?
O número de travessias indicadas é o mínimo?

TAREFA 7

Temos cinco discos brancos e cinco discos pretos alinhados como mostra a figura.

O único movimento permitido é a troca de posição entre dois discos adjacentes.
Qual é o menor número de movimentos que tem de se efectuar para obter a seguinte sequência dos discos?

2.4.4.5. Estratégia: reduzir a um problema mais simples/ descobrir um padrão

Uma das estratégias mais poderosas de resolução de problemas é a procura de regularidades em casos particulares, reduzindo a um problema mais simples, que conduza a uma lei de formação aplicável ao caso geral.

▶ *Exemplo:*

Num clube de ténis vai realizar-se um campeonato numa mão, isto é, cada um dos dez atletas participantes jogará com cada um dos outros uma única vez.

Quantos jogos se disputarão no campeonato?

Ler e compreender o problema

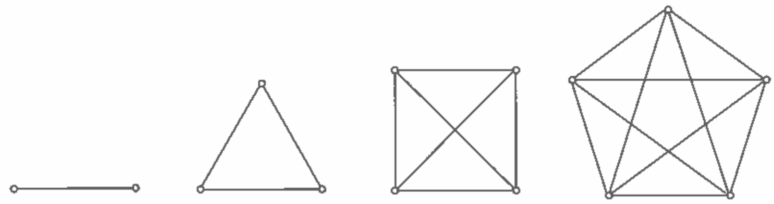
Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:

• Quantos atletas vão disputar o campeonato?
Dez.

• Significa que cada atleta jogará com cada um dos outros uma única vez?
Significa que, se o atleta A já jogou com o atleta B, estes dois não voltarão a jogar um com o outro.

Fazer e executar um plano

Vamos começar por reduzir a um problema mais simples, imaginando que havia apenas dois, e depois três, quatro, etc., atletas a disputar o campeonato, e determinar o número de jogos em cada caso, recorrendo a um diagrama.



2 atletas
1 jogo

3 atletas
3 jogos

4 atletas
6 jogos

5 atletas
10 jogos

De seguida, podemos organizar os dados numa tabela e procurar descobrir um padrão.

Atletas	Jogos
2	1
3	3 = 1 + 2
4	6 = 3 + 3 = 1 + 2 + 3
5	10 = 6 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4
...	...

Descobrimos assim que, por cada atleta que entra o número de jogos a mais vai aumentando e esse aumento é igual ao número total de atletas menos uma unidade, porque esse atleta que entra vai jogar com todos os que já estavam considerados (e não com ele próprio!).

Assim, se forem dez atletas o número de jogos será

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

O número total de jogos a disputar é de 45.

Note-se que, embora a estratégia fundamental seja a descoberta do padrão, utilizámos outras estratégias para a resolução deste problema, tais como:
- reduzir a um problema mais simples;
- fazer diagramas;
- fazer uma tabela.

É muito frequente o recurso a várias estratégias combinadas. No caso concreto da tabela, esta por si só não conduz à solução, mas é muito útil para organizar os dados.

Verificar a resposta

A simplificação do problema para um menor número, que ia aumentando, de atletas em jogo, aliado à elaboração de diagramas e à construção de uma tabela para registo dos vários casos, ajudou-nos a descobrir uma lei de formação entre o número de jogos e o respectivo número de atletas. Claro que podíamos simplesmente ter listado, de forma organizada, todos os jogos possíveis com dez atletas e contá-los. Representando os atletas pelas dez primeiras letras do alfabeto, temos:

AB	BC	CD	DE	EF	FG	GH	HI	IJ
AC	BD	CE	DF	EG	FH	GI	HJ	
AD	BE	CF	DG	EH	FI	GJ		
AE	BF	CG	DH	EI	FJ			
AF	BG	CH	DI	EJ				
AG	BH	CI	DJ					
AH	BI	CJ						
AI	BJ							
AJ								

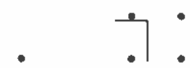
$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$

Aqui, utilizámos como estratégia a elaboração de uma lista organizada. Poderíamos também ter recorrido a uma dramatização da situação. No entanto, **a descoberta do padrão**, num ou noutro processo, **é a estratégia mais poderosa, pois permite generalizar para um número qualquer de atletas**. Se este número for muito grande, torna-se mesmo impossível a listagem ou a elaboração de diagrama.

Deste exemplo sobressai a força extraordinária da estratégia da descoberta de um padrão.

TAREFA 8

Um número quadrado é um número que pode ser representado geometricamente por pontos dispostos em quadrado. Quatro é um número quadrado. Obtém-se acrescentando um número ímpar de pintas ao primeiro número quadrado, o 1.



1 4

Qual é o maior número quadrado inferior a 150?

2.4.4.6. Estratégia: trabalhar do fim para o princípio

Quando sabemos o ponto de chegada mas não conhecemos o ponto de partida, torna-se útil trabalhar do fim para o princípio. Esta estratégia exige e ao mesmo tempo desenvolve a reversibilidade de pensamento e o conhecimento das operações inversas.

▶ *Exemplo:*

O João foi a uma loja e gastou metade do dinheiro que tinha e ainda mais um euro. Depois, entrou numa segunda loja e gastou metade do dinheiro que lhe restava e ainda mais um euro, tendo esgotado o dinheiro todo. Quanto dinheiro tinha ele antes de ir à primeira loja?

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:
Quais são as acções do João?
Entra em duas lojas onde gasta dinheiro.
Com quanto dinheiro ficou o João no fim?
Com zero euros.
O que se quer saber?
Quanto dinheiro tinha o João no princípio.

Fazer e executar um plano

Vamos raciocinar do fim para o princípio.

	Dinheiro do João (€)	
	No fim	0
Na 2ª loja	Antes de gastar 1 €	1
	Antes de gastar metade do que lhe restava	2
Na 1ª loja	Antes de gastar 1 €	3
	Antes de gastar metade do que tinha	6

Antes de entrar na primeira loja o João tinha 6 euros.

Verificar a resposta

Voltemos a confirmar os raciocínios e os cálculos para ver se estão bem feitos.

TAREFA 9

Num jogo para dois participantes há 15 moedas na mesa. Cada jogador tira, na sua vez, uma, duas ou três moedas. O jogador que tirar a última moeda ganha o jogo. Descubra uma estratégia vencedora para o primeiro jogador.

2.4.4.7. Estratégia: usar dedução lógica

Quando há muitas informações, temos de usar raciocínio lógico para eliminar casos impossíveis e seleccionar as situações correctas.

▶ *Exemplo:*

O António, o Bernardo, o Carlos, o Diogo, o Ernesto e o Filipe têm, como animais de estimação, um cão, um gato, um peixe, um canário, uma rola e um hamster. (1) O António, o Bernardo e o Filipe não gostam de animais com pêlo. (2) O dono do canário brinca muitas vezes com o António. (3) O dono do peixe tem um ano mais que o António e um ano menos que o Filipe. (4) O dono do cão já partiu de férias com o Carlos e com o Ernesto, mas este último só partiria com o dono do gato. Quem é o dono de cada animal?

Ler e compreender o problema

Podemos formular algumas questões que ajudem à compreensão:
Quantos são os rapazes? E os animais?
São seis.
O que se sabe sobre o dono do peixe?
Tem um ano mais que o António e um ano menos que o Filipe.
Etc.

Fazer e executar um plano

Como temos muitas condicionantes em jogo, vamos mais uma vez organizar os dados numa tabela e, raciocinando logicamente, vamos eliminando as impossibilidades e tirando conclusões.

Representam-se os rapazes pela primeira letra do seu nome e as impossibilidades por X e a alínea respectiva quando for caso disso. Por exclusão de partes seleccionam-se os factos verdadeiros com V.

	A	B	C	D	E	F
Cão	X (1)	X (1)	X (4)	V	X (4)	X (1)
Gato	X (1)	X (1)	V	X	X (4)	X (1)
Peixe	X (3)	V	X	X	X	X (3)
Canário	X (2)	X	X	X	X	V
Rola	V	X	X	X	X	X
Hamster	X (1)	X (1)	X	X	V	X (1)

Podemos assim concluir que:

O António é o dono da rola;
O Bernardo é o dono do peixe;
O Carlos é o dono do gato;
O Diogo é o dono do cão;
O Ernesto é o dono do hamster;
O Filipe é o dono do canário.

Verificar a resposta

Repitamos os raciocínios feitos para confirmar se estão correctos.

TAREFA 10

Ya, Ba, Ua, Ta e Ga são cinco extraterrestres que viajam numa nave espacial.
Ya é mais novo que Ua.
Ya não é o mais novo do grupo.
Só um dos amigos é mais velho que Ga.
Ga é mais novo que Ba.
Ordene os amigos por ordem crescente das suas idades.

2.5. FORMAS DE ABORDAR AS INVESTIGAÇÕES

Uma abordagem de investigação fornece experiências muito ricas para o pensamento matemático, tais como a descoberta de padrões, a elaboração, teste, refutação ou prova de conjecturas e o estabelecimento de generalizações.

Pirie (1987) afirma que numa tarefa de investigação os resultados são desconhecidos para os estudantes e que "a resposta correcta" não é esperada; deste modo, eles terão de explorar as possibilidades, fazer conjecturas e persuadir-se a si próprios e aos outros acerca da validade das suas descobertas. Isto significa que, quando formulam conjecturas, têm de generalizar e, consequentemente, é importante justificar essas conjecturas e, se lhes for pedido, prová-las.

Os programas oficiais de matemática também reflectem estas ideias: os alunos podem explorar uma tarefa aberta, reconhecer e descobrir padrões, fazer e testar conjecturas, estabelecer conclusões e comunicá-las oralmente ou por escrito (DEB, 2000).

Pensamos assim que é importante a sistematização de uma forma de abordagem deste tipo de tarefas. Baseando-nos em Stevenson (2001), apresentamos de seguida um resumo das três fases que deverão ser percorridas na realização de uma tarefa de investigação.

Fases de uma Investigação (adaptado de Stevenson, 2001)

Fase indutiva

- Exploração inicial de modo a tomar contacto com a proposta e a ter uma ideia precisa sobre a questão central
- Sistematização e organização dos dados com vista ao seu relacionamento
- Procura de um padrão ou regularidade nos dados
- Testagem do padrão em mais dados
- Formulação de uma conjectura

Fase dedutiva

- Argumentação com vista à justificação da conjectura feita
- Demonstração da conjectura

Fase criativa

- Procura de extensões da questão em estudo

Analisamos de seguida um exemplo, colocando em relevo as três fases da investigação.

▶ *Exemplo:*

Descubra todos os números naturais que têm exactamente três divisores.

Resolução

Fase indutiva

Começamos por fazer algumas experiências numéricas.

1 tem um divisor.
2 tem dois divisores.
3 tem dois divisores.
4 tem três divisores.
5 tem dois divisores.
6 tem quatro divisores.
7 tem dois divisores.
8 tem quatro divisores.
9 tem três divisores.
10 tem quatro divisores.
11 tem dois divisores.
12 tem seis divisores.
13 tem dois divisores.
14 tem quatro divisores.
15 tem quatro divisores.
16 tem cinco divisores.
17 tem dois divisores.
18 tem seis divisores.
19 tem dois divisores.
20 tem seis divisores.
21 tem quatro divisores.
22 tem quatro divisores.
23 tem dois divisores.
24 tem oito divisores.
25 tem três divisores.
26 tem quatro divisores.
...

Os números encontrados até agora são 4, 9 e 25. O que têm estes números em comum?

São todos quadrados perfeitos. $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $25 = 5^2$. Mas o 16 também é e tem cinco divisores. $16 = 4^2$. Os que nos interessam são só os quadrados perfeitos de 2, 3, 5, ...

Haverá um padrão nestes números? Sim, são números primos.

De seguida testamos esse padrão noutros casos, como em $49 = 7^2$, $121 = 11^2$, $169 = 13^2$, ...

Também funciona.

Com base no reconhecimento dos números encontrados, formulamos uma conjectura para o tipo de números que têm esta propriedade: são os quadrados perfeitos de primos.

Fase dedutiva

Para a justificação da conjectura, e atendendo ao nível e conhecimentos dos alunos, pode usar-se uma linguagem mais ou menos formal.

Neste caso, para justificar que todo o quadrado perfeito dum primo tem exactamente três divisores, poderá argumentar-se com a definição de primo – inteiro que possui exactamente dois divisores; atendendo a que o nosso número é o quadrado dum primo, vai passar a ter três – e só três – divisores: a unidade, o primo e o próprio número. Não pode ter mais porque um novo divisor implicaria a factorização do primo num produto não trivial, o que contrariava a definição de primo.

Reciprocamente, se um número *n* tiver exactamente três divisores, como estes se "agrupam" aos pares, cujo produto é *n*, dois dos divisores são necessariamente a unidade e o próprio número *n*, já que $1 \times n = n$. O terceiro divisor, seja *d*, se não tem par faz par com ele próprio, ou seja, $d \times d = n$. Então, $n = d^2$, o que prova que *n* é quadrado perfeito. Falta só provar que *d* é primo, mas se não fosse teria ele próprio divisores além da unidade e de *d*, o que arrastaria mais divisores para o número *n* inicial. E isto não pode dar-se já que partimos da hipótese de que *n* tem apenas três divisores.

Concluindo: os números que têm exactamente três divisores são os quadrados perfeitos dos números primos.

Fase criativa

Esta investigação pode sugerir-nos o estudo de outras propriedades, como por exemplo:

– quais são os números que têm exactamente cinco divisores;

ou, atendendo à constatação anterior de que uns têm um número par e outros um número ímpar de divisores:

– quais são os números que têm um número ímpar de divisores?

2.6. FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

Apesar de reconhecer a importância da formulação de problemas, Pólya deu mais atenção à resolução de problemas. Contudo, nos últimos anos, o NCTM (1989, 1991, 1995, 2000) tem vindo a defender a formulação de problemas como uma actividade bastante importante a considerar nas aulas de matemática a par da resolução de problemas.

A principal diferença entre estas duas actividades reside no facto de que, enquanto na resolução de problemas é o professor que formula *a priori* o problema ou a pergunta, o que para muitos autores é considerado como um factor limitador para as finalidades do trabalho escolar, na formulação de problemas são os alunos que se envolvem em situações do seu contexto social, problematizando-as e processando a formulação dessas situações a problemas. Em relação a este aspecto pode dizer-se que a formulação de problemas permite que os alunos inventem problemas usando a sua própria linguagem dentro das suas próprias vivências e contextos, proporcionando uma alternativa interessante ao ensino tradicional da resolução de problemas.

A formulação de problemas tem sido entendida quer como a criação de novos problemas quer como a reformulação de um dado problema. Para Palhares (1997), a "formulação de problemas ocorre quando um indivíduo inventa ou descobre um problema" (p. 167). Pensamos que a importância da formulação de problemas é inquestionável, pois é uma actividade fundamental que contribui consideravelmente para a compreensão dos conceitos matemáticos ao proporcionar uma revisão quer do processo necessário para resolver determinado problema quer dos conteúdos envolvidos. Nesta sequência, Ernest (1991) refere que a formulação encoraja a criação de conhecimento pelos alunos. Os professores têm de estar atentos às situações com que são confrontados, que podem ser provocadas ou ocasionais, para reconhecerem as suas potencialidades matemáticas e a partir delas serem capazes de transformá-las em situações desafiantes e matematicamente ricas para os alunos. Por outro lado, a partir de um dado problema podemos obter novos problemas, simplificando-os, enriquecendo-os ou ainda adaptando-os ao nível de ensino que pretendemos.

Silver (1995) refere que a formulação de problema pode ocorrer **antes** da resolução do problema, isto é, quando a partir de uma determinada situação se gera o problema; **durante**, quando se modificam intencionalmente as condições ou os objectivos do problema; e **depois** da resolução do problema, quando a partir do problema resolvido se modificam ou aplicam as condições ou experiências tidas com a resolução a novas situações. Neste sentido, a formulação pode surgir quer a partir de problemas existentes quer a partir de uma determinada situação ou conjunto de dados. Em relação às fases propostas por Silver, a última é bastante recorrente quando se fazem as extensões a um problema.

A questão da formulação de um problema é uma das características referidas por Ernest (1996) que permite fazer a distinção entre uma investigação e um problema. Saber colocar questões é vital, sobretudo quando se resolvem situações muito abertas. Deste modo, a formulação de problemas é uma componente essencial na aprendizagem da matemática.

Vejamos algumas estratégias para a formulação de problemas.

2.6.1. Estratégias para a formulação de problemas

2.6.1.1. Aceitando os dados

A partir de uma dada situação, estática, como seja, por exemplo, uma definição, uma condição, um objecto, uma figura, uma tabela, formulam-se perguntas (Brown e Walter, 1993).

▶ *Exemplo:*

Com base na tabela, que indica o número de alunos por cor de olhos de duas escolas, formule algumas questões de modo a obter um problema.

	Escola 1		**Escola 2**	
1.º ano	azul	219	azul	46
	castanho	346	castanho	328
	outra	24	outra	23
2.º ano	azul	206	azul	53
	castanho	304	castanho	289
	outra	83	outra	42
3.º ano	azul	162	azul	22
	castanho	381	castanho	341
	outra	47	outra	37

Partindo desta tabela podemos formular várias questões, como por exemplo:

Em qual das escolas é maior a percentagem de alunos com olhos azuis?
Qual a cor mais comum nas duas escolas?
No 1.° ano quantos alunos não têm olhos azuis ou castanhos, em cada uma das escolas?

Faça o gráfico mais adequado que permita comparar a cor dos olhos dos alunos entre as duas escolas.
Faça o gráfico mais adequado, para cada uma das escolas, que ilustre a percentagem de alunos distribuídos pela cor dos seus olhos.

2.6.1.2. E se em vez de

A partir de uma situação identificamos quais as suas propriedades ou atributos. Negamos uma ou mais dessas propriedades e, então, formulamos perguntas que, por sua vez, poderão originar a negação de outra propriedade e mais perguntas (Brown e Walter, 1983).

▶ *Exemplo:*

Seja a condição $x^2 + y^2 = z^2$. Partindo da análise desta condição, formule um problema.

1.°) Podemos começar por identificar que é a condição geradora dos ternos pitagóricos; 2.°) Identificamos, por exemplo, duas das suas propriedades: trata-se de uma igualdade e todas as variáveis têm expoentes iguais; 3.°) Modificando as propriedades, por exemplo, negando a condição, obtemos uma inequação $x^2 + y^2 \leq z^2$; 4.°) Podemos agora formular uma questão:
"Determine os números naturais, x, y e z, que são solução da condição $x^2 + y^2 \leq z^2$"; 5.°) Analise a questão.

2.6.1.3. Variação de um problema

Quando trabalhamos com problemas é essencial a variação de um problema. A partir de um problema podemos obter outros problemas por meio de decomposição e recomposição, de analogia, de particularização e generalização (Pólya, 1957).

▶ *Exemplo:*

Partindo do problema "Dadas as três dimensões de um paralelepípedo rectângulo, calcule a diagonal", formular outros problemas.

Podemos obter, por exemplo, outros problemas, mudando alguns dos dados.
Por generalização "Calcular a diagonal de um prisma rectangular, sendo dadas as três arestas que partem de um vértice" ou, por analogia, "Calcular a diagonal de um hexaedro regular de aresta dada".

2.6.1.4. De problema para problema

A partir do problema original e da sua resolução podem-se desenvolver muitos problemas mudando algumas condições ou atributos do problema original (Takeuchi e Sawada, citados em Becker e Shimada, 1997). Esta estratégia pode ser interpretada como um caso particular da estratégia anterior.

▶ *Exemplo:*

São feitos quadrados com fósforos, como mostra a figura. Quando temos oito quadrados, quantos fósforos são usados?

Depois de resolver este problema podemos propor outros, mudando no problema original "quadrado" para "triângulo". Também podemos criar um novo problema onde se pergunte o número de quadrados que se podem construir seguindo o padrão apresentado utilizando um número determinado de fósforos (problema inverso).

2.6.1.5. Recontextualização

Depois de resolvido um dado problema e identificada alguma característica, podem-se formular novos problemas fixando essa característica e envolvendo-o em novo contexto (Palhares, 1992).

▶ *Exemplo:*

Na festa da Sofia, dez pessoas cumprimentam-se com um aperto de mão. Quantos apertos de mão são trocados na festa se todos se cumprimentarem uns aos outros?

Identificando a estratégia que se utilizou para resolver este problema, e que foi a descoberta de um padrão, podemos formular o seguinte problema:

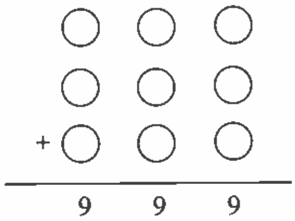
"Quantas rectas ficam definidas no plano se tivermos dez pontos não colineares, três a três?"

TAREFA 11

Comente a afirmação: "Matemática é resolução de problemas".

Exercícios e Problemas

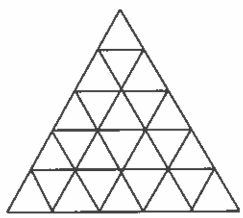
1 Distribua cada um dos números – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 – pelos círculos de modo a que a soma dos três números seja 999.



2 O sr. Silva pediu ao santo da sua terra que lhe duplicasse o dinheiro que tinha na mão. O santo aceitou com a condição de o sr. Silva lhe dar a seguir dez euros de esmola e repetir o processo mais duas vezes. No fim, o pobre homem ficou sem nada. Quanto dinheiro tinha ele à partida?

3 Joana e Mateus estão encarregados de dispor as mesas para o lanche da escola. Há cinco mesas quadradas que são todas do mesmo tamanho. As mesas devem estar dispostas de modo que os lados se toquem completamente. De que diferentes maneiras podem as mesas ser arranjadas?

4 Quantos triângulos pode ver na figura?



5 Um caracol prepara-se para subir um muro de 8 m de altura. Todos os dias sobe três metros mas de noite escorrega dois. Quantos dias demora a atingir o cimo?

6 Miguel, Maria, Marcos e Marta foram à feira popular, onde todos estiveram em divertimentos diferentes. Escolheram o carrossel, a montanha russa, os aviões e o comboio fantasma. Nenhuma rapariga andou de avião. Em que divertimento andou a Marta enquanto o irmão do Miguel estava na montanha russa e a Maria no carrossel?

7 O Carlos quer fazer um arquivo das suas cassetes de vídeo. Para isso vai numerá-las ordenadamente começando no 1, e utiliza autocolantes colando um dígito de cada vez. No fim do trabalho o Carlos utilizou no total 492 dígitos autocolantes. Quantas cassetes de vídeo tem ele?

8 Numa circunferência estão marcados quinze pontos. Usando todos esses pontos, quantas cordas podemos traçar?

9 Um quadrado mágico é tal que a soma de cada linha, coluna e diagonal é a mesma.

Disponha na grelha os números de 1 a 9 de modo a obter um quadrado mágico.

10 A Ana deu ao Berto e à Clara tantos rebuçados a cada um quantos os rebuçados que eles já tinham. Em seguida, o Berto deu à Ana e à Clara tantos rebuçados a cada uma quantos os rebuçados que elas tinham. Por fim, a Clara deu à Ana e ao Berto tantos rebuçados a cada um quantos os rebuçados que eles tinham. No fim, cada um dos três ficou com 24 rebuçados.

Quantos rebuçados tinha cada um à partida?

11 A turma da professora Noémia está sentada no chão em círculo. Todos os alunos estão igualmente espaçados e numerados por ordem. O número 5 está sentado exactamente em frente do número 16.

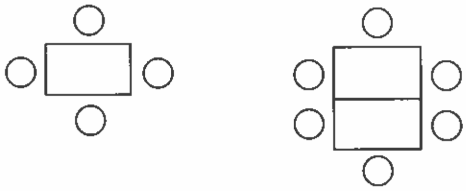
Quantos alunos tem a turma?

12 Três jovens casais têm os seguintes elementos: Helena, Joana, Rita, João, Pedro e Bruno. João é médico. A ocupação dos outros é, não respectivamente, artista, cantor, piloto, secretário e novelista.

- João é casado com a artista;
- Helena é a mulher do piloto;
- Rita é casada com o novelista;
- Bruno não é novelista nem casado com a secretária.

Quem é casado com quem?

13 Na cantina da escola podem sentar-se a uma mesa quatro pessoas. As mesas são todas iguais. Se se juntarem duas mesas, podem sentar-se seis pessoas.



Quantas mesas serão necessárias para sentar vinte pessoas?
Quantas pessoas podem sentar-se em 14 mesas juntas?

14 Três vasilhas têm 3, 5 e 9 litros de capacidade. Como poderemos usar essas vasilhas para medir exactamente 7 litros de água?

15 O avô tem na carteira três notas de 20 euros, três de 10 euros e três de 5 euros. Tirando à sorte três notas da carteira, que quantias podem estas perfazer?

16 Desenhe os dois termos seguintes da sequência de pontos:

Quantos pontos serão necessários para desenhar o termo de ordem 15?

17 A partir do problema – "Estão seis pessoas numa sala, quantos apertos de mão se trocam?" – Formule um novo problema que utilize a mesma estratégia de resolução.

18 Considere a seguinte informação:

A Inês tem as seguintes moedas

3 moedas de 1 cêntimo
8 moedas de 2 cêntimos
5 moedas de 20 cêntimos
11 moedas de 50 cêntimos
5 moedas de 1 euro

18.1. Utilize a informação dada para formular um problema.

18.2. Sabendo que estão à venda os seguintes artigos

Um gelado por € 2
Um copo de leite por € 0,35
Um póster por € 2,65
Uma bola por € 3,15

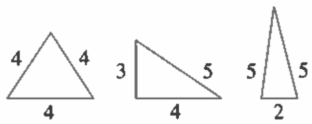
Utilize toda a informação disponível para formular novos problemas.

19 Considere a seguinte informação:

"Quatro dos cinco dentistas entrevistados recomendam a pastilha elástica *Xicle*".

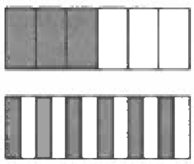
Utilize a informação dada para formular um problema.

20 Considere os três triângulos cujas dimensões estão assinaladas

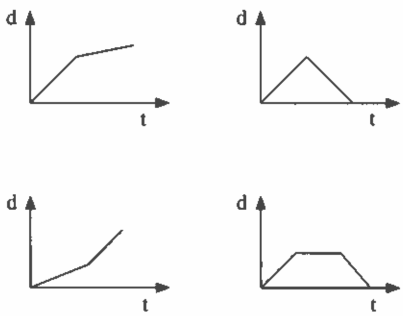


Formule problemas que recorram à informação dada.

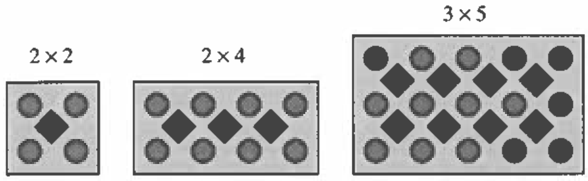
21 Utilize os esquemas seguintes para formular um problema



22 Formule um problema que se adapte a cada um dos seguintes gráficos, onde t – tempo e d – distância



23 O super chocolate é apresentado em caixas onde os caramelos estão dispostos no centro de cada uma das filas de bombons, como mostra a figura.



As dimensões de cada uma das caixas diz-nos quantas colunas e quantas linhas de bombons tem cada caixa.

Descubra um método para encontrar o número de caramelos e de bombons em cada uma das caixas sabendo as suas dimensões. Explique e justifique o método que usou para chegar ao resultado.

Adaptado de *Principles and Standards*, NCTM, 2000

24 Considere a sequência

3 10 5 16

que se obteve do seguinte modo:

- parte-se de um número qualquer (neste caso, 3)
- para os números seguintes:
  - se o número for par, passa-se para metade;
  - se o número for ímpar, acha-se o triplo e adiciona-se uma unidade.

24.1. Escreva os termos seguintes da sequência.
24.2. Investigue o que se passa com outro número inicial.
24.3. Tire conclusões.

Conjectura de Collatz

25 O sr. Antunes quer fazer uma piscina rectangular rodeada de um passeio, formado por azulejos quadrados, como mostra a figura.

Explique por palavras, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de uma piscina rectangular com quaisquer dimensões.

26 Sabendo que ■ Representa um número par
● Representa um número ímpar

Complete a igualdade de modo a obter uma afirmação verdadeira. Justifique.

●+■ = ...

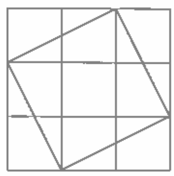
Descubra outras igualdades verdadeiras usando os mesmos símbolos e as operações adição e multiplicação. Justifique.

27 Num quadrado podem inscrever-se vários quadrados.

Desses quadrados consideremos aqueles cujos vértices são pontos de intersecção das quadrículas com os lados do quadrado inicial.

▶ *Exemplo:*

Na figura, temos um quadrado 3×3, com um quadrado inscrito, nas condições indicadas.

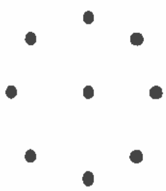


Descubra quantos quadrados, nestas condições, se podem inscrever no quadrado 3×3? E em quadrados 4×4? E 5×5?

Descubra possíveis relações entre as áreas do quadrado inicial e dos quadrados inscritos.

Adaptado de *Mathematics Teaching in the Middle School* (NCTM, Fev. 1998)

28



A figura representa os vértices de um octógono regular e o respectivo centro.

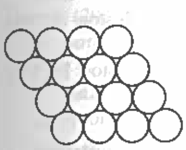
Investigue quantos triângulos e quadriláteros é possível desenhar unindo alguns dos nove pontos e classifique-os.

29 Descubra todos os rectângulos que pode identificar num tabuleiro de xadrez (8×8).

Tire conclusões.

30 *Diffy* (Adaptado do jogo inventado por Herbert Wills)

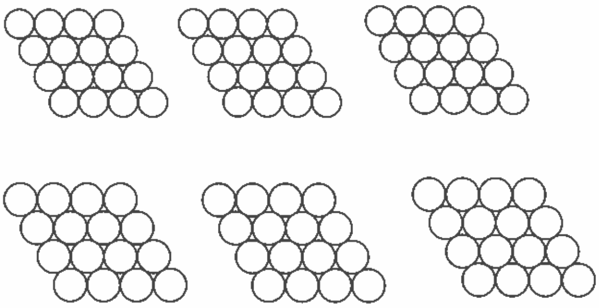
1.º Passo: Utilize o diagrama de composição de círculos apresentado e escolha quatro números para colocar nos quatro círculos da primeira fila.



2.º Passo: Em cada um dos três primeiros círculos da segunda linha escreva as diferenças dos números que o ladeiam na primeira linha, subtraindo o mais pequeno do maior. No quarto círculo coloque a diferença entre o maior e o menor dos números situados no primeiro e último círculo da primeira linha.

3.º Passo: Repita o segundo passo nas linhas sucessivas do diagrama. Pare se obtiver uma linha de zeros.

4.º Passo: Repita os 1.º, 2.º e 3.º passos várias vezes, começando de cada vez com números diferentes.



30.1. Pensa que o processo acaba sempre?

30.2. Consegue indicar quatro números para os quais o processo pare no segundo passo? No terceiro passo? Tente com vários números de partida.

30.3. Será capaz de arranjar quatro números de tal modo que o processo pare ao fim de oito passos?

30.4. Experimente o *Diffy* começando com os números 17, 32, 58 e 107.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico.* Lisboa: ME-DEB.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional para o ensino básico. Competências essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

Ministério da Educação (1991a). *Organização Curricular e Programas, vol. I. Ensino Básico 2.º ciclo.* Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1991b). *Organização Curricular e Programas, vol. I. Ensino Básico 3.º ciclo.* Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1991c). *Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem, vol. II. Ensino Básico 3.º ciclo.* Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1991d). *Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem, vol. II. Ensino Básico 2.º ciclo.* Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (1990). *Ensino Básico 1.º ciclo.* Reforma Educativa. Lisboa: ME-DGEBS.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: recommendations for school mathematics of the 1980s.* Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston: NCTM [Tradução portuguesa: *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa. APM/IIE. 1991].
National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston: NCTM [Tradução portuguesa: *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa. APM/IIE. 1994].
National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Addenda Series.* Reston: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment standards for school mathematics.* Reston: NCTM [Tradução portuguesa: *Normas para a avaliação em matemática escolar.* Lisboa. APM. 1999].
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.
National Research Council (1989). *Everybody counts.* Washington: National Academy Press.

Estas referências constituem um conjunto fundamental de documentos programáticos e curriculares nacionais e internacionais sobre o ensino e aprendizagem da matemática, em particular sobre a importância do desenvolvimento de capacidades de ordem superior nos estudantes de matemática de qualquer nível de ensino.

Abrantes, P., Leal, L. e Ponte, J. (1996). *Investigar para aprender matemática.* Lisboa: APM.
Becker, J. e Shimada, S. (eds). (1997). *The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics.* Reston: NCTM.
Brown, S. e Walter, M. (1993). Problem posing in mathematics education. *In* Brown e Walter (Eds.). *Problem posing – reflections and applications.* New Jersey: LEA.
Charles, R., Mason, R. e Garner D. (1985). *Problem solving experiences in mathematics.* USA: Addison-Wesley Publishing Company.
Charles, R. e Lester, F. (1982). *Teaching problem solving.* Palo Alto. Dale Seymour Publications.
Charles, R. e Lester, F. (1986). *Mathematical problem solving.* Springhouse: Learning Institute.
Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London: Falmer.
Ernest, P. (1996) Investigações, resolução de problemas e pedagogia. *In* P. Abrantes, L.C. Leal e J.P. Ponte (Orgs.). *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25-48). Lisboa: APM.
Fernandes, D., Vale, I., Silva, J.C., Fonseca, L. e Pimentel, T. (1998). *Matemática 7* – Livro de texto de Matemática para o 7.º ano. Porto: Areal Editores.
Kantowski, M. (1974). *Processes involved in mathematical problem solving* (Tese de doutoramento). Michigan: UMI.
Lester, F. (1994). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de matemática? A situação nos Estados Unidos. *In* Fernandes et al. (Org.) *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular.* Lisboa: IIE.
Lester, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. *In* R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press.
Lester, F. e Schroder, T. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. *In* Trafton e Shulte (Eds.) *New directions for elementary school mathematics.* Reston: NCTM.
Mayer, R. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. *In* E. Silver (Ed.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: multiple research perspectives.* Hillsdale: Erlbaum.
Mason, J., Burton, L. e Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* Bristol: Addison-Wesley.
Mendonça, M. (1999). Resolução de problemas pede (re)formulação. *In* Abrantes et al. (Orgs.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 15-33). Lisboa: APM.
Palhares, P. (1992). *The Introduction of a Problem Solving Strategy as a Means to Teach Mental Arithmetic.* Lisboa: APM.
Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídas por futuros professores de matemática. *In* D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale. (Coords.). *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 159-188). Aveiro: GIRP.
Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classrooms – a pack for teachers.* University of Oxford & University of Warwick.
Pólya, G. (1973). *Mathematical Discovery.* New York: Wiçey.
Pólya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton. Princeton University Press [Tradução portuguesa, *Como Resolver Problemas.* Lisboa. Gradiva. 2003].
Pólya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. *In* S. Krulik e R. Reys (Eds.), Problem solving in school mathematics, pp. 1-2, Reston: NCTM.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *In* Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Company.
Silver, E. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical end pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematical Education*, 27 (2), 67-72.
Stevenson, F.W. (2001). *Exploratory Problems in Mathematics.* Reston: NCTM.

Vale, I. (1994). Resolução de problemas: Desempenhos de futuros professores de matemática. *In* A.P. Mourão, I. Rocha, J.A. Fernandes, J. Fernandes e L. Almeida (Orgs.), *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 209-222). Lisboa: APM.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. *In* D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale. (Coords). *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 1-38). Aveiro: GIRP.

Vale, I. (2002). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. Lisboa: APM.

Estas referências constituem um conjunto de documentos fundamentais sobre a resolução de problemas, formulação de problemas e investigações matemáticas. Além de textos de natureza teórica, há textos de natureza mais empírica onde são relatadas algumas experiências sobre a temática da resolução de problamas nas suas diversas vertentes.